12/11/18

הרצאה מס' 9 - טופולוגיה

במרחב האוסדורף כל נק' בודדת היא קבוצה סגורה.

שאלה חשובה - מה אוסף הפונקציות הרציפות במרחב?

דוגמאות: X, $\Omega_X=\{\emptyset,X\}$, $Y\in T_2$, $f\in C(X,Y)$ אז $f\equiv const$. (נניח שיש 2 נק' שונות ב-Y $\odot$ אפשר להפריד אותן ע"י שתי קבוצות פתוחות, ואז התמונות ב-Y $\odot$ ההפוכות שלהן לא ריקות, זרות וצריכות להיות פתוחות כי f רציפה
אם זה לא יכול להתקיים, לכן זה מאוד דל רק פונק' קבועות.

הגדרה - X נקרא רגולרי שלמות אם לכל קבוצה סגורה $F\subset X$ ולכל $x\notin F$ קיימת פונק' רציפה, $f\in C(X,\mathbb{R})$ כך ש- $f(x)=0$, $f|_F=1$.
מספיק פונק' כדי אפשר להפריד קבוצות ואחר שרגולריות נובעת מזה.
כלומר - $\underset{X\ni}{f^{-1}((-1,\tfrac{1}{3}))}\cap \underset{\supset F}{f^{-1}((\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{2}))}$.

למה של אוריסון: נניח X מרחב טופולוגי נורמלי (מספיק מרחב מטרי, רגיל) $A,B\subset X$ סגורות זרות, $A\cap B=\emptyset$, אז קיימת $f\in C(X,[0,1])$ כך ש- $f|_A=0$, $f|_B=1$.

מהינתן פונק' f, נגדיר $F_t=\{x \mid f(x)\le t\}$ קבוצה סגורה לכל t, מתקיים - $s<t$, $F_s\subset F_t$.

טענת עזר -
הוכחה - יהיו $F,U\subset X$, $F\subset U$, F סגורה, U פתוחה, אז קיימים U' פתוחה, ו- F' סגורה כך ש- $F\subset U'\subset F'\subset U$.

הוכחת טענת עזר - $X\setminus U$ קבוצה סגורה, כיוון ש- $F\subset U$, אזי אם נסמן $G=X\setminus U$
נקבל $G\cap F=\emptyset$, מהגדרה של נורמליות, קיימות סביבות של F,G זרות, כלומר
U',V פתוחות, $U'\cap V=\emptyset$ כך ש- $F\subset U'$, $G\subset V$. (נעבור למשלימים - $X\setminus V\subset X\setminus G$
כלומר $X\setminus V\subset U$ (כי $X\setminus G=U$) והיא קבוצה סגורה, נסמן $F'=X\setminus V$
ומכאן ש- U',V זרות אז $U'\subset F'=X\setminus V$ וסיימנו להוכיח את הטענה.

כעת, נחזור להוכחת הלמה - (נגדיר סדרה U_p כך ש- הן קבוצות פתוחות וסדרה שלה
$U_p\subset F_p$, F_p סגורה כך ש- $p<q$ $U_p\subset F_p\subset U_q\subset F_q$. ($U_p$ קבוצות פתוחות, F_q סגורות)
ראשית נגדיר, $U_1=X\setminus B$, $F_1=X$, ולכל $t>1$ (נגדיר) $F_t=X$, $U_t=X$, $t<0$, $U_t,F_t=\emptyset$
ושלפי הקבוצה U_1 פתוחה ויש לנו קבוצה A סגורה כך ש- $A\subset U_1$ לפי טענה, קיימים
U_0,F_0 כך ש- $A\subset U_0\subset F_0\subset U_1$. (בחרנו מעל F_0,U_1 כך ש- $F_0\subset U_1$

(ממשיכים, נמצא וקיימים $U_{\frac{1}{2}}, F_{\frac{1}{2}}$ כך ש- $F_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset F_{\frac{1}{2}} \subset U_1$

$F_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset F_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ $\quad F_{\frac{1}{2}} \subset U_{3/4} \subset F_{3/4} \subset U_1$

וממשיכים כמו שלמדנו באינדוקציה ונקבל אוסף קבוצות כפי שרצינו, אוסף סגור

אילו p,q? רציונליים דיאדיים $D=\{x\in\mathbb{Q} : x=\frac{m}{2^k}, m\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}\}$

אז $p,q\in D\cap\mathbb{Q}$, ואם $p<q$ נקבל ש- $U_p\subset F_p\subset U_q\subset F_q$.

כעת, נגדיר פונקציה - $f(x)=\inf\{p\in D \mid x\in U_p\}$

טענת עזר - (א) אם $x\in F_p$ אז $f(x)\le p$

(ב) אם $x\notin U_p$ אז $f(x)\ge p$

הוכחה - (א) אם $x\in F_p$ אז לכל $q>p$ מתקיים $x\in U_q$ אז האינפימום קטן או שווה ל-p -

$f(x)\le\inf\{q \mid q>p\}=p$ (p,q מספרים דיאדיים כלומר $\in D$)

(ב) $x\notin U_p$ אז לכל $q<p$ מתקיים $x\notin U_q$ (מהמונוטוניות) ולכן -

$\{r\in D \mid x\in U_r\}\subset\{r\in D \mid r>p\}$ ולכן $f(x)\ge p$.

כעת, נוכיח ש-f שמצאנו מקיימת $f\in C(X,[0,1])$, $f|_B=1$, $f|_A=0$.

$\forall p>1$, $U_p=X$ אז לכל $x\in X$, $x\in U_p$ ולכן $f(x)\le 1$. $\forall p<0$, $U_p=\emptyset$, כלומר $f(x)\ge 0$

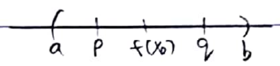
$A\subset U_0$ לפי ההגדרה, ולכן לכל $x\in A$ $f(x)\le 0$ $f|_A=0$.

$U_1=X\setminus B$, מתקיים כי על טענה קודמת לכל $x\in B$ מתקיים $f(x)\ge 1$ ולכן $f|_B=1$.

נשאר להוכיח ש-f רציפה. (כלומר $f\in C(X,\mathbb{R})$ (כל $[0,1]$ טופולוגיה מושרה)

צ"ל שלכל $a<b$ $f^{-1}(a,b)$ פתוחה. (מספיק לבדוק רציפות לפי בסיס)

מספיק שלכל x_0, $f(x_0)\in(a,b)$ קיימת סביבה V כך ש- $f(V)\subset(a,b)$



לפי צפיפות המספרים הדיאדיים במס' ממשיים,

צ"ל להוכיח כמו הרציונליים לכן, קיימים $p,q\in D$ כך ש- $f(x_0)\in(p,q)\subset[p,q]\subset(a,b)$

נגדיר $V=U_q\setminus F_p\in\Omega$ זו קבוצה פתוחה, ואם $x\in V$ אז $x\in U_q$ ולכן $x\in F_q$

ולכן $f(x)\le q$ מסעיף הראשון של טענה קודמת. $x\notin F_p\supset U_p$, ולכן $x\notin U_p$ לכן מסעיף שני

של טענה קודמת $f(x)\ge p$. $x\in U_q\subset F_q \Rightarrow f(x)\le q$, $x\notin F_p \Rightarrow f(x)\ge p$