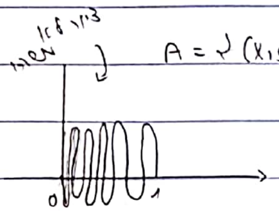
7/11/18

הרצאה מס' 8 - טופולוגיה

ראינו X קשיר מסילתית ⟸ X קשיר.

<u>מסקנה</u>- $A\subset X$ קשיר מסילתית אז $\bar{A}$ קשורה

(כל רכיב קשר זו קבוצה סגורה)



<u>דוגמא שההפך לא נכון</u>- (נמיין ע- $A\subset\mathbb{R}^2$ כאשר $A=\{(x,\sin\frac{1}{x}):0<x\le 1\}$

A גרף של פונקציה $\sin\frac{1}{x}$ ו-A קשורה מסילתית, לכל 2 נק' $a,b\in A$

$a=\alpha\sin\frac{1}{\alpha}$, $b=\beta\sin\frac{1}{\beta}$, $\gamma(t)=(\alpha(1-t)+\beta t,\sin(\ldots))$

$\bar{A}=A\cup[-1,1]$ זו קבוצה קשורה, אבל לא קשורה מסילתית.

(נראה פורמלית: ש- $\bar{A}$ לא קשורה מסילתית - אין שום מסילה $\gamma:[0,1]\to\bar{A}$ רק ש-

$\gamma(0)=(0,0)$ $\gamma(1)=(1,\sin(1))$. (נניח בשלילה שיש מסילה כזו, (נגדיר פונק' עזר-

$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $P(x,y)=x$ ⟸ הטלה מ-$\mathbb{R}^2$ לציר x, זוהי פונקציה רציפה ולכן

$\varphi:=P\gamma\in C([0,1],\mathbb{R})$ (נסתכל על אוסף כל השורשים של φ, $\varphi(0)=0$ אז - (התמונה ההפוכה (של 0) φ^{-1})

$\{x\mid\varphi(x)=0\}\neq\emptyset$. $\varphi(1)=1$ אז לא שייך להקבוצה הזו, וזוהי קבוצה סגורה, (נסמן

$a:=\max\{x\mid\varphi(x)=0\}<1$, מרציפות נובע כי לכל $\varepsilon>0$ בפרט גם $\varepsilon=\frac{1}{3}$ קיים $\delta>0$, סמוכה

של נק' a כך שלכל $x\in(a-\delta,a+\delta)\cap[0,1]$ מתקיים $\gamma(x)\in B_{\frac{1}{3}}(\gamma(a))$ ולכן

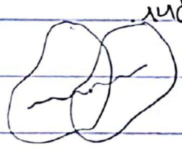
$d(\gamma(x),\gamma(a))\le\frac{1}{3}$, $\gamma(a)=(0,c)$ עבור $x>a$ $\gamma(x)=(\varphi(x),\sin\frac{1}{\varphi(x)})$ ולכן

$|\sin\frac{1}{\varphi(x)}-c|\le\frac{1}{3}$ $\forall x\in(a,a+\delta)$ כיוון ש- φ רציפה, φ מקבלת ב- $(a,a+\delta)$

כל הערכים בין $\varphi(a)=0$ ו-$\varphi(a+\delta)>0$ ובפרט מקבלת $\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k+\pi},\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}\right)$ עבור

k מספיק גדול ולכן $\sin\frac{1}{\varphi(x)}$ מקבלת 1 , -1 ולא מרוחק $\frac{1}{3}$ מ-c.

<u>טענה</u> - $A,B\subset X$ קשורות מסילתית ו- $A\cap B\neq\emptyset$ אז $A\cup B$ קשורה מסילתית.



<u>הוכחה</u>- מיידי.

<u>הגדרה</u>- $C\subset X$ (נקראת רכיב קשירות מסילתית אם C קשורה מסילתית ומקסימלית (במובן של $\subseteq$)

$x\in X$ (נגדיר) $C_x=\bigcup_{x\in U}U$ ברור ש- C_x רכיב קשירות מסילתית

U קשורה מסילתית

<u>טענה</u> - $f:X\to Y$ רציפה, $A\subset X$ קשורה מסילתית אז $f(A)$ גם קשורה מסילתית

<u>הוכחה</u>- תהיינה $a,b\in f(A)$ אזי קיימות $\alpha,\beta\in A$ כך ש- $f(\alpha)=a,f(\beta)=b$. A קשורה מסילתית אז

כי $\gamma\in C([0,1],A)$, $\gamma(1)=\beta$, $\gamma(0)=\alpha$ אז (נגדיר $\gamma_1=f\circ\gamma\in C([0,1],f(A))$, $\gamma_1(0)=a,\gamma_1(1)=b$.

אקסיומות הפרדה

מרחב האוסדורף- מרחב טופולוגי X נקרא מרחב האוסדורף אם לכל $x,y\in X$, $x\neq y$ קיימים $U,V\in\Omega$, $x\in U$, $y\in V$ ו-$U\cap V=\phi$. סימון $X\in T_2$.

משפט- אם X מטריזבילי (מרחב מטרי) מספיק ש- אז X האוסדורף

הוכחה- T_2 תכונה טופולוגית ולכן מספיק להוכיח משפט במקרה שבו X מטרי.
(תכונה טופולוגית נשמרת בין שני מרחבים הומיאומורפיים אם כ"ז שניהם מקיימים את התכונה או לא מקיימים)
(מטריזבילי אם הוא הומיאומורפי למרחב מטרי)
יהיו $x,y\in X$, $x\neq y$ $d(x,y)>0$ ונבחר $r=\frac{1}{2}d(x,y)$ אז $B_r(x)\cap B_r(y)=\phi$ וסיימנו.

דוגמה למרחב שאינו האוסדורף- $\Omega=\{\phi,X\}\notin T_2$.

- ניקח X עם טופולוגיה קו-סופית, ניקח נק' כלשהי, $\overset{\in\Omega}{U}$ סביבה פתוחה אזי $X\setminus U$ קבוצה סופית, $V\in\Omega$ אזי $X\setminus V$ סופית ולכן בהכרח $U\cap V\neq\phi$
  $X\neq$ האיחוד סופי $\Leftarrow$ $(U\cap V)^c=\underbrace{U^c}_{\text{סופית}}\cup\underbrace{V^c}_{\text{סופית}}$
  סינגלטונים להיות שיוון
  אחת מעוצמה אינסופית ואחת מעוצמה סופית.
- R^2 עם טופולוגיה Zariski

התכנסות- $x_n\in X$ סדרה, $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ אם לכל סביבה U של נק' a קיים N כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $x_n\in U$.

טענה- אם $X\in T_2$ אז אם הגבול של סדרה $\{x_n\}$ קיים, אז הוא יחיד.

הוכחה- (נניח בשלילה) שקיימים 2 גבולות $a,b\in X$, $a\neq b$ כך ש- $x_n\to a$, $x_n\to b$
כיוון ש- $X\in T_2$ קיימים, $U,V\in\Omega$, $a\in U$, $b\in V$ ו-$U\cap V=\phi$. וזו סתירה כי אם $x_n\to a$ אז קיים N כך שלכל $n\geq N$ $x_n\in U$, ולכן $x_n\notin V$ ו- $x_n\not\to b$.

מרחב טופולוגי של Sierpinski $X=\{a,b\}$, $\Omega=\{\phi,\{a\},X\}$ לכן,
$a,a,a,\ldots\to a$ וגם $a,a,a,\ldots\to b$

משפט- $f,g\in C(X,Y)$, $Y\in T_2$ אז קבוצה $\{x\mid f(x)=g(x)\}$ זו קבוצה סגורה.

הוכחה- נז"ל שמשלים הקבוצה פתוחה כלומר $\{x\mid f(x)\neq g(x)\}$ קבוצה פתוחה, נסמנה ב- W.
יהי $x\in W$ אז $a:=f(x)\neq g(x):=b$ ומכיוון ש- $Y\in T_2$ קיימות $a\in U, b\in V$ כאשר $U,V\in\Omega_Y$ ו- $U\cap V=\emptyset$. f,g רציפות ולכן, $f^{-1}(U), g^{-1}(V)\in\Omega_X$.

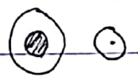
$$\Omega_X\ni\underbrace{f^{-1}(V)\cap g^{-1}(U)}_{:=C}\neq 0,\ x\in f^{-1}(U),\ x\in g^{-1}(V)$$

נוכיח ש- $C\subset W$ וזה יסיים את ההוכחה.
יהי $z\in C$, אזי $f(z)\in U$, $g(z)\in V$ והן קבוצות זרות $U\cap V=\emptyset$ ולכן $f(z)\neq g(z)$ כלומר, $z\in W$. כלומר, $C\subset W$ וזה מוכיח את הטענה, לכל נק' שלקבוצה מצאנו סביבה מקבוצה.

מסקנה- נניח ש- $f,g\in C(X,Y)$, $Y\in T_2$ ו- $f=g$ מקבוצה צפופה אז $f\equiv g$.

דוגמה- נניח Y עם טופולוגיה טריוויאלית $\Omega_Y=\{\emptyset,Y\}$ אזי $f:X\to Y$ מ-X כלשהו, f רציפה אפשר לשנות אותה ולכן לקבל כשמוצאת המסקנה, $\{x\mid f(x)=g(x)\}$ אין שום הגבלה. לכן צריך הכרחי $Y\in T_2$.

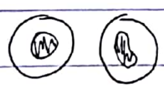
הגדרה- מרחב X (נקרא) רגולרי (T_3) אם לכל קבוצה סגורה $A\subset X$ ולכל $x\notin A$ קיימים קבוצות פתוחות זרות $U,V\in\Omega$: $U\cap V=\emptyset$, $x\in U$, $A\subset V$.



משפט- X מרחב מטרי (מטריזבילי) הוא רגולרי.

הוכחה- (נגדיר- $d=d(x,A)=\inf_{y\in A}d(x,y)$, ראשית נבדוק, אם $d=0$ אזי קיימת סדרה y_n כך ש- $d(y_n,x)\to 0$ כך ש- $x\in\bar{A}=A$, זה סותר $x\notin A$. (לפי ההגדרה ולכן סגור)
אם $d>0$ (נגדיר $r=\frac{1}{2}d$ ונגדיר $U=B_r(x)$ ולהלן הקבוצה V (נגדיר- $V=\bigcup_{y\in A}B_r(y)$ קבוצה פתוחה, אם $A\subset V$, אם $z\in V$ אז קיימת $y\in A$ כך ש-
$d(y,z)<r \Leftarrow d(z,x)\geq d(y,x)-d(z,y)\geq d-r=r$

הגדרה- מרחב X (נקרא) נורמלי (T_4) אם לכל $A,B\subset X$ סגורות $A\cap B=\emptyset$ קיימות $U,V\in\Omega$, $U\cap V=\emptyset$ כך ש- $A\subset U$, $B\subset V$.



משפט- אם X מרחב מטרי (מטריזבילי) אז הוא נורמלי

הוכחה- לכל $x\in A$, (נגדיר $d_x=d(x,B)$ ונסמן ב- $U_x=B_{\frac{d_x}{2}}(x)$, ולכל $y\in B$ (נגדיר $r_y=\frac{d(y,A)}{2}$ ו- $V_y=B_{r_y}(y)$. לכל $x\in A$, $y\in B$ $U_x\cap V_y=\emptyset$. אזי,

Scanned by CamScanner

אז $z \in U_x \cap V_y$

$$d(z,x) < \frac{d_x}{2} < d(x,y)/2$$

$$d(z,y) < \frac{d(y,A)}{2} < d(x,y)/2$$

ולכן-

$$d(x,y) \le d(z,x) + d(z,y) < d(x,y)$$

סתירה!

$U = \bigcup_{x \in A} U_x$, $V = \bigcup_{y \in B} V_y$ פתוחות, ברור כי $B \subset V$, $A \subset U$ ו-

$$U \cap V = \bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} \underbrace{(U_x \cap U_y)}_{=\phi} = \phi$$