5/11/18

הרצאה מס' 7 - טופולוגיה

הוכחת משפט אינדוקציה לפי קשירות - לכל $x\in X$ נגדיר $U_x=\bigcup_{\substack{U\in E\\ x\in U}} U$ (בזריקה מסעיף ג')

אם $x,y\in X$ אם $U_x\cap U_y\neq\emptyset$ נגדיר E_0 מאוסף המכי- $E_0=\{U_x,U_y\}$. (שים ♡)

כי $U_x\in E$. נגדיר $E_0^x=\{U\in E \mid x\in U\}$, אז $A,B\in E_0^x$ מתקיים $A\cap B\neq\emptyset$

כי $\{x\}\subset A,B$ ולכן הוא מקיים את תכונה (ב) ומהוכחה של משפט $\bigcup_{U\in E_0^x} U\in E$.

$E_0=\{U_x,U_y\}$ מקיים גם (ב) של משפט ולכן $U_x\cup U_y\in E$, $x\in$ וזוהי קבוצה פתוחה

וכיוון ש- $x\in U_x\cup U_y$ מתקיים $U_x\cup U_y\in E_0^x$ ולכן קיבלנו $U_x\subset U_x\cup U_y\subset U_x$

וסימטריה נקבל כי $U_x\cup U_y=U_y$ ולכן $U_x=U_y$.

U_x קבוצה פתוחה (איחוד של קבוצות פתוחות). וכעת, נקבל פירוק, נבחר $a\in X$

ונגדיר $X=U_a\cup\Big(\underbrace{\bigcup_{U_y\neq U_a} U_y}\Big)$

איחוד של קבוצות פתוחות $\Leftarrow$ קבוצה פתוחה

יש לנו פירוק של X ל-2 קבוצות פתוחות זרות לכן אחת מהם ריקה, $a\in U_a$ ולכן $U_a\neq\emptyset$ ולכן מקשירות של X מתקיים $U_a=X$.

הגדרה: מרחב (X,Ω) נקרא קשיר לחלוטין אם כל רכיב קשר הוא נק' אחת.

דוגמה - טופולוגיה דיסקרטית $(X,2^X)$, אך לא רק, למשל $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ לא קשיר לחלוטין. (טופולוגיה סטנדרטית מושרית) הקבוצה של קנטור גם. $C\subset[0,1]$.

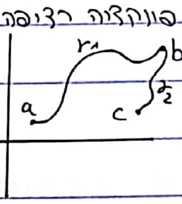
הגדרה: נגדיר $\varphi(X)=|\{x\in X: X\setminus\{x\}$ לא קשיר$\}|$ אם $X\sim Y \Rightarrow \varphi(X)=\varphi(Y)$

כיוון שקשירות זו תכונה טופולוגית. (הרבה אינווריאנטים טופולוגיים).

לדוגמה $\varphi(\mathbb{R})=0$, $\varphi([0,1))=1$ $\varphi([0,1])=2$, $\varphi(S^1)=\aleph$

קשירות מסילתית

הגדרה- (X,Ω) מרחב טופולוגי, פונקציה רציפה γ מ-$[0,1]$ ל-X (נקראת מסילה)



$a=\gamma(0)$, $b=\gamma(1)$

מסילה הפוכה $\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t)$

מכפלת מסילות - γ_1 מסילה מ-a ל-b, γ_2 מסילה מ-b ל-c אז מוגדר
$$\gamma_1*\gamma_2(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & 0\le t\le\frac12\\ \gamma_2(2t-1) & \frac12\le t\le 1\end{cases}$$
מסילה מ-a ל-c ו- $(\gamma_1*\gamma_2)^{-1}=\gamma_2^{-1}*\gamma_1^{-1}$

כדי לבדוק שהיא רציפה, צ"ל רק בנק' $\frac{1}{2}$. $b\in U$

$$\gamma^{-1}(U)=\underbrace{(\gamma^{-1}(U)\cap[0,\tfrac{1}{2}])}_{\text{קב' פתוחה בטופולוגיה מושרית}}\cup\underbrace{(\gamma^{-1}(U)\cap[\tfrac{1}{2},1])}_{\text{קב' פתוחה בטופולוגיה מושרית}}$$

הגדרה: מרחב (X,Ω) נקרא קשיר מסילתית אם לכל 2 נק' $a,b\in X$ קיימת מסילה מ-a ל-b.

דוגמא: $\mathbb{R}^n$ קשיר מסילתית, $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ גם קשיר מסילתית

- כל מרחב (X,Ω) קשיר מסילתית בהכרח הוא קשיר.

הוכחה: יהיו $a,b\in X$ לפי הגדרה קשירות מסילתית, קיימת γ רצ' ב-X $\gamma\in C([0,1],X)$ $\gamma(0)=a,\gamma(1)=b$, $\gamma([0,1])$ קבוצה קשירה כי $[0,1]$ קבוצה קשירה כי זו תמונה של פונקציה רציפה על קבוצה קשירה. נניח U_a זהו רכיב קשירות של נק' a. אז $a\in U_a\cap\gamma([0,1])\neq\emptyset$ והוכחנו שאיחוד של שני קבוצות קשירות שחיתוכן לא ריק זו קבוצה קשירה $U_a\cup\gamma([0,1])$ קבוצה קשירה ולכן $\gamma([0,1])\subset U_a$ ולכן $b\in U_a$ ו-b שרירותי. לכן יש רק רכיב קשירות אחד.