31/10/18

הרצאה מס' 6 - טופולוגיה

הגדרה- מרחב טופולוגי X קשיר אם לכל A פתוחה וסגורה מתקיים $A\in\{\phi,X\}$

טענה- X מרחב טופולוגי לא קשיר אמ"מ קיימת $f\in C(X,\mathbb{R})$ כך ש- $Imf=\{-1,1\}$.
(באופן שקול אמ"מ $f\in C(X,\{-1,1\})$ עם טופולוגיה דיסקרטית)

הוכחה- אם X לא קשיר אז לפי הגדרה קיימת A ב- X $\phi\neq A\subsetneq A$
כך ש- A פתוחה ו- $X\setminus A$ פתוחה (וסגור) - נגדיר $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in A\\ 1 & x\notin A\end{cases}$ ונבדוק שהיא
רציפה, ברור שהיא על $\{-1,1\}$, $Imf=\{-1,1\}$ כי A, $X\setminus A$ לא ריקות. ונבדוק
רציפות- צריך לבדוק קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה, ש תמונה הפוכה היא קבוצה פתוחה.
$f^{-1}(U)\in\{\phi, \underset{-1\in U,\,1\notin U}{A}, \underset{-1\notin U,\,1\in U}{X\setminus A}, \underset{\pm1\in U}{X}\}$ ומכיוון שכולן פתוחות, התמונה הפוכה פתוחה.

בכיוון שני, נניח כי $f\in C(X,\mathbb{R})$ ו- f על $\{-1,1\}$ אז נגדיר $A=f^{-1}((-2,0))$ פתוחה
מרציפות f ואז- $X\setminus A=X\setminus f^{-1}((-2,0))=f^{-1}((0,2))=f^{-1}(1)$ וזה גם קבוצה פתוחה
לא ריקה ובאיחוד שלהם זה כל X.

הגדרה- $V\subset X$, V קשירה אם V עם טופולוגיה מושרה הוא מרחב קשיר.

משפט- $V\subset\mathbb{R}$ קשירה אמ"מ V קטע במובן רחב ($(a,b),[a,b),(a,b],[a,b]$
$-\infty\le a<\infty$, $-\infty<b\le\infty$)

הוכחה- יהי V קטע, נשתמש במסקנה קודמת, ונניח בשלילה שזו הקבוצה לא קשירה
אז קיימת $f:V\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $Imf=\{-1,1\}$, כלומר קיימות 2 נק' $x_1,x_2\in V$ כך
ש- $f(x_1)=-1$, $f(x_2)=1$ ממשפט ערך הביניים קיים ערך $c\in V$ כך ש- $f(c)=0$
סתירה לכך ש- $Imf=\{-1,1\}$

בכיוון הפוך - נניח בשלילה ש- V לא קטע. מה זה אומר ש- V לא קטע? (נסמן
$a=\inf V$, $b=\sup V$ אם זה לא קטע, אז קיים c כך ש- $a<c<b$
$c\notin V$, $A=V\cap(-\infty,c)\neq\phi$ פתוחה ב- V, $B=V\cap(c,\infty)\neq\phi$ פתוחה ב- V
$A\cup B=V$, $A\cap B=\phi$ בסתירה.

טענה- X מרחב טופולוגי קשיר, $f\in C(X,Y)$ אז $f(X)$ קבוצה קשירה.

הוכחה- נסמן $W:=f(X)$ ונניח ש- $A\subset W$ פתוחה וסגורה (בטופולוגיה מושרית) ואנו צריכים להוכיח $A\in\{\emptyset,W\}$. $f\in C(X,W)$ לפי טופולוגיה מושרית ולכן $f^{-1}(A)$ גם קבוצה פתוחה וסגורה ב- X. נתון ש- X קשיר אז $f^{-1}(A)\in\{\emptyset,X\}$, ואם $f^{-1}(A)=\emptyset$ ולכן $A=\emptyset$ או $f^{-1}(A)=X$ ולכן $A=W$, השתמשנו שהתמונה של f זה W, במקרה שני $f^{-1}(A)=\emptyset$.

מסקנה חשובה- נניח X מרחב קשיר $f\in C(X,\mathbb{R})$ אז טווח של פונקציה f זה קטע ($f(X)$ קטע) ממוצע הרמה.

הוכחה- לפי טענה קודמת $f(X)$ גם מרחב קשיר, $f(X)\subset\mathbb{R}$ ולכן לפי משפט זה קטע. (ממוצע הרמה)

טענה- X מרחב טופולוגי, $Z\subset X$ פתוחה וסגורה ותהי $V\subset X$ קבוצה קשירה.

1. אזי מתקיים או $V\subset Z$ או $V\subset X\setminus Z$.
2. אם V צפופה (ב- X) אז או $Z=\emptyset$ או $Z=X$.

הוכחה- (1) נגדיר קבוצה $A:=V\cap Z$ לפי הגדרה של טופולוגיה מושרית וכיוון ש- Z פתוחה וסגורה, גם A פתוחה וסגורה ב- V. ו- V עם טופולוגיה מושרית הוא מרחב קשיר ולכן $A\in\{\emptyset,V\}$, אם $A=\emptyset$ $V\subset X\setminus Z$ ואם $A=V$ אז $V\subset Z$.

(2) נניח ש- V צפופה (ב- X) ומתקיים $V\subset Z$, ו- $X\setminus Z$ פתוחה וזרה ל- V, $X\setminus Z\cap V=\emptyset$, אז $X\setminus Z\subset Ext(V)$ ומהגדרת צפיפות $Ext V=\emptyset$ ולכן $X\setminus Z=\emptyset$ כלומר $X=Z$. מקרה שני, צריכים להפוך את Z ו- $X\setminus Z$, במקרה שני אם $V\subset X\setminus Z$, Z פתוחה וסגורה $X\setminus Z$ גם פתוחה וסגורה ולכן מצפיפות V מתקיים $X\setminus Z=X$ ו- $Z=\emptyset$.

(2) דרך קצת יותר- נניח $V\subset Z$, V צפופה ולכן Z צפופה, Z סגורה ולכן $X=Z$ ובדיוק באותה דרך, אם $V\subset X\setminus Z$ אז $X\setminus Z$ סגורה וצפופה ולכן $X=X\setminus Z$.

מסקנה 1- X מרחב טופולוגי ו- $V\subset X$ צפופה וקשירה אז מרחב X קשיר.

הוכחה- מיידית מן הטענה הקודמת, $Z\subset X$ פתוחה וסגורה אז מ-(2) $X=Z$ או $Z=\emptyset$ כלומר X קשיר.

מסקנה 2- X מרחב טופולוגי $V\subset X$ קבוצה קשירה אז $\bar{V}$ קבוצה קשירה

הוכחה- V צפופה בסגור שלה בטופולוגיה מושרית. (ב- $\bar{V}$)

משפט- X מרחב טופולוגי, $V,W\subset X$ קשירות, $V\cap W\neq\emptyset$ אז $V\cup W$ קבוצה קשירה.

הוכחה- $A\subset V\cup W$ פתוחה וסגורה בטופולוגיה המושרית ב- $V\cup W$. צ"ל שאו $A=\emptyset$ או $A=V\cup W$. (נחלק את A ל-2 קבוצות באופן טבעי, $A_V=A\cap V$, $A_W=A\cap W$. מאחר שטופולוגיה מושרית זה דבר טרנזיטיבי, A_V סגורה ופתוחה בטופולוגיה של V ו- A_W סגורה ופתוחה בטופולוגיה W. מההנחה שלנו שאלו מרחבים קשירים ולכן $A_V\in\{\emptyset,V\}$, $A_W\in\{\emptyset,W\}$. $A=A_V\cup A_W$. אם שניהן ריקות A_V,A_W אז A קבוצה ריקה. אם $A_V=V$, $A_W=W$ אז $A=V\cup W$. צ"ל שלא יתכן ש- $A_V=\emptyset$ ו- $A_W=W$ או $A_V=V$ ו- $A_W=\emptyset$. ברור שהכל סימטרי, (נניח אחד מהם). אם $A_W=W$ אז כיוון ש- $V\cap W\neq\emptyset$, $A_W\subset A$ ולכן $A\cap V\supset A_W\cap V=W\cap V\neq\emptyset$ ומקרה זה לא יתכן

הגדרה- X מרחב טופולוגי, $V\subset X$, נקרא רכיב קשירות אם V קבוצה קשירה מקסימלית ב- X. ($V\subsetneq W$ אז W לא קשירה)

האם תמיד מתקיים/מתקיים כזאת קבוצה? יהי $x\in X$ ונגדיר $\Gamma_x=\{V\subset X \mid x\in V,\ V \text{ קשיר}\}$ ונסמן $W=\bigcup_{V\in\Gamma_x}V$ מהמשפט (קצת) כי W קבוצה קשירה. יש למשפחה זו חיתוך שונה נק' x. ברור שזו קבוצה מקסימלית במשפחה Γ_x. ולכן זהו רכיב קשירות של נק' x

טענה- V רכיב קשירות אז $V=\bar{V}$.

הוכחה- $\bar{V}$ גם קשירה (ראינו) ו- $V\subset\bar{V}$ ומהמקסימליות של V $\bar{V}=V$.

מסקנה - V,W רכיבי קשירות אז או $V=W$ או $V\cap W=\emptyset$.

הוכחה- אם $V\cap W\neq\emptyset$ אז לפי משפט קודם $V\cup W$ קבוצה קשירה ומהמקסימליות ($V,W\subset V\cup W$) $V=V\cup W=W$.

אינדוקציה לפי קשירות

X מ"ט קשיר, $E\subset\Omega$, נאמר E מתקיים- (1) $\bigcup_{U\in E}U=X$

(2) $E_0\subset E$ כך שלכל $A,B\in E_0$ $A\cap B\neq\emptyset$ אז $\bigcup_{U\in E_0}U\in E$

אז $X\in E$.

שימוש סטנדרטי-

מסקנה- $f: X \to Y$, X קשיר, קבוע לוקלית אז $f \equiv const$. קבוע לוקלית-
לכל $x \in X$ קיימת סביבה $x \in V \subset \Omega_x$ כך ש-$f|_V \equiv const$.

נניח $E = \{U \subset \Omega \mid f|_U \equiv const\}$, מכיוון ש-$f$ קבוע לוקלית (קבל גנוי (1)
ממשפט אינדוקציה לפי קשירות, לכל x קיים $x \in U \in E$ ולכן $\bigcup_{U \in E} U = X$.
נניח ש- $E_0 \subset E$ כך שלכל $A, B \in E_0$, $A \cap B \neq \emptyset$ ונרצה
$\bigcup_{U \in E_0} U \overset{?}{\in} E$, נגדיר $V = \bigcup_{U \in E_0} U$ וניקח $x, y \in V$ צ"ל $f(x) = f(y)$ כיוון
ש- $x, y \in V$ אזי קיימות $U_x \in E_0, U_y \in E_0$ כך ש- $x \in U_x, y \in U_y$ ולפי הנחה
לפי ההנחה קיימת $z \in U_x \cap U_y$, $E_0 \subset E$, $U_x, U_y \in E$ ולכן $f|_{U_x}$, $f|_{U_y}$
קבוע, מהסבר הראשון (קבוע) $f(x) = f(z)$ מהסבר השני (קבוע) $f(y) = f(z)$ וסיימנו.
$(f(x) = f(y))$. ולכן $X \in E$ ולכן $f|_X$ קבוע.