24/10/18

הרצאה מס' 4 - טופולוגיה

יהי (X,Ω) , $Y\subset X$, $\Omega^X_Y=\{V\cap Y : V\in\Omega\}$

טענה- $U\subset Y$ פתוחה אמ"מ קיים $V\subset X$, $V\in\Omega$ כך ש- $U=Y\cap V$

$E\subset Y$ סגורה אמ"מ קיים קבוצה W סגורה ב- X כך ש- $E=W\cap Y$.

1. $Y\in\Omega$ אז $U\subset Y$ פתוחה אמ"מ $U\in\Omega$
2. $Y\subset X$ סגורה אז $U\subset Y$ סגורה (ב- Ω^Y_X) אמ"מ U סגורה ביחס ל- Ω.
3. (X,ρ) מרחב מטרי $\Omega=\Omega_\rho$ אז, $\Omega^X_Y=\Omega_{\rho_Y}$ כאשר $\rho_Y=\rho|_{Y\times Y}$
4. אם B בסיס של Ω אז $B_1=\{V\cap Y : V\in B\}$ של Ω^X_Y.

הוכחה של 3- נד' (מ-4) ש- $B_1=\{B_r(a)\cap Y \mid r>0, a\in X\}$ בסיס של טופולוגיה Ω_{ρ_Y}

לפי הגדרה Ω_{ρ_Y} (נוצרת ע"י) בסיס - $B_{\rho_Y}=\{B^Y_r(b)=\{z\in Y \mid \rho(z,b)<r\}$ כאשר $b\in Y, r>0$.

$B_1\ni B^Y_r(b)=B_r(b)\cap Y$, $\Omega_{\rho_Y}\subset\Omega^X_Y$.

נד' אם $U\in\Omega^X_Y$ אז $U\in\Omega_{\rho_Y}$. מספיק להראות ש- $U\in B_1$, כלומר $U=B_r(a)\cap Y$

אם $U=\emptyset$ אז ברור. אם $U\neq\emptyset$, $b\in U$ $\rho(b,a)<r$ ולכן קיים

$\varepsilon>0$ כך ש- $\rho(b,a)+\varepsilon<r$ ולכן $B(b,\varepsilon)\subset U$, $b\in V_b=B(b,\varepsilon)\cap Y\subset U$

$V_b\in B_{\rho_Y}$ ולכן $U=\bigcup_{b\in U}V_b\in\Omega_{\rho_Y}$.

5. $Z\subset Y\subset X$ כאשר (X,Ω) מרחב טופולוגיה (Y,Ω^X_Y), (Z,Ω^Y_Z)

טענה- $\Omega^Y_Z=\Omega^X_Z$

הוכחה- $U\in\Omega^Y_Z \iff \exists V\in\Omega^X_Y \quad U=V\cap Z$

$V\in\Omega^X_Y \iff \exists W\in\Omega \quad V=W\cap Y$

$\iff U\in\Omega^Y_Z \iff \exists W\in\Omega : U=(W\cap Y)\cap Z=W\cap Z$

מיון נקודות- (X,Ω) מרחב טופולוגי, $A\subset X$:

(1) $x\in A$ נק' פנימית של A אם קיימת סביבה של x שמוכלת ב- A, כלומר

קיימת $U\in\Omega$ כך ש- $x\in U\subset A$. $Int(A)$.

דוגמה- אם $\Omega=2^X$ אז לכל A, $Int A=A$.

פנים הוא קבוצה פתוחה. $x\in Int A$ קיים $U_x\subset A$, $x\in U_x\in\Omega$

$Int A=\bigcup_{x\in Int A}U_x\in\Omega$

(2) $Ext\, A = Int(X\setminus A)$

(3) שפה של A $\quad Fr A = \partial A = X\setminus(Int\,A + Ext\,A)$

(4) סגור של A $\quad \bar{A} = cl A =: A\cup\partial A$, $\bar{A} = X\setminus Ext\,A$

אם (X,ρ), $A\subset X$ אז $\bar{A} = \{x : \rho(x,A)=0\}$, $\rho(x,A) := \inf_{y\in A}\rho(x,y)$

הגדרה- $A\subset X$ צפופה אם $\bar{A} = X$

דוגמאות- ϕ צפופה ב- $\mathbb{R}$, ובאופן כללי X צפופה ב- X.

הגדרה- A דלילה אם $Ext\,A$ צפופה (כלומר, A לא צפופה בשום מקום)

הערה- לשים ♡, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ גם צפופה אבל זה לא אומר ש- $\mathbb{Q}$ דלילה כי $\phi = Int\,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ לא צפופה.

טענה- A דלילה אמ"מ $Int(\bar{A})=\phi$ (תרגיל)

הגדרה- $x\in X$ נק' הצטברות של A אם לכל סביבה U של x מתקיים $(U\setminus\{x\})\cap A\neq\phi$
את אוסף נק' ההצטברות של A מסמנים ב- $A'(A)$.

הגדרה- $x\in A$ נקרא מבודד $x\in Iso(A)$ אם קיימת סביבה U של X כך ש- $\phi = (U\setminus\{x\})\cap A$

הגדרה- יהיו (X,Ω_X), (Y,Ω_Y) מרחבים טופולוגיים ותהי $f: X\to Y$. f נקראת
רציפה אם $f^{-1}(U)\in\Omega_X$ $\forall U\in\Omega_Y$.

טענה- אם $B\subset\Omega_Y$ בסיס אז $f: X\to Y$ רציפה אמ"מ $\forall U\in B, f^{-1}(U)\in\Omega_X$.

הוכחה- כיוון שתנאי זה הכרחי לרציפות, נוכיח כי הוא מספיק - תהי $U\in\Omega_Y$, כיוון ש-B
בסיס, נוכל לכתוב $U = \bigcup_{\substack{V\in B\\ V\subset U}} V$. מתקיים $f^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{V\in B\\ V\subset U}} f^{-1}(V) \underset{\substack{f^{-1}(V)\in\Omega_X \text{ כי}\\ V\in B \text{ לכל}}}{\in} \Omega_X$

ולכן סיימנו.

דוגמא- לפונקציה רציפה - אם הפונקציה קבועה, אז מקור של כל קבוצה פתוחה הוא ϕ או X ולפיכך
קבועות הן רציפות.

דוגמה- (X,Ω), $f:X\to X$ נגדיר $f(x)=x$. לכל $A\subset X$ מתקיים $f^{-1}(A)=A$

ולפיכך, $f^{-1}(A)=A\in\Omega$, $\forall A\in\Omega$

טענה- בטופולוגיה הטריוויאלית, הפונק' הרציפות היחידות הן הקבועות $\Omega=\{\emptyset,X\}$

$(f:Y\to X)$

טענה- בטופולוגיה בדידה, כל פונק' רציפה.

יהיו $\Omega'_Y\subset\Omega_Y$, $\Omega'_X\subset\Omega_X$, אז יש 4 מושגים של רציפות, מה היחס ביניהם?

$f:(X,\Omega_X)\to(Y,\Omega_Y)$ רציפה $\Rightarrow$ רציפה מ- (X,Ω_X) ל- (Y,Ω'_Y)

$f:(X,\Omega'_X)\to(Y,\Omega_Y)$ רציפה $\Rightarrow$ רציפה מ- (X,Ω_X) ל- (Y,Ω_Y)