22/10/18

# הרצאה מס' 3 - טופולוגיה

**תזכורת** - הגדרנו מטריקות, ב- $\mathbb{R}^2$, $1\le p<\infty$, $\rho_p(x,y)=(|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p)^{1/p}$

$\rho_\infty(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$

והטענה היא שלכל $p,q$ $\rho_p\sim\rho_q$

הוכחה - (שים ♡) כי לכל $p$ $\rho_p(x,y)\ge\rho_\infty(x,y)$ ומטענה קודמת נקבל $\Omega_{\rho_\infty}\subset\Omega_{\rho_p}$.

כמו כן, $\rho_p(x,y)=(|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p)^{1/p}\le(2\rho_\infty^p(x,y))^{1/p}$

$\Leftarrow$ $\rho_p(x,y)\le 2^{1/p}\rho_\infty(x,y)$ ושוב מטענה קודמת $\Omega_{\rho_p}\subset\Omega_{\rho_\infty}$

• תרגיל: הראו כי אם $(X,\rho)$ מרחב מטרי $\rho_1=\sqrt{\rho}$ אז $\rho_1\sim\rho$.
ועבור $\rho_2=\min\{\rho,1\}$ נקבל $\rho_2\sim\rho$.

• תרגיל: (נתון) הקבוצה- $L=\{(x_1,\dots,x_n,\dots)\mid\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$ ונגדיר $\rho_p(x,y)=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p)^{1/p}$ מוגדרת על $L$. הוכח: אם $q<p$ אז $\Omega_{\rho_p}\subsetneq\Omega_{\rho_q}$ כלומר, המטריקות לא שקולות.

**טענה**- $(X,\rho)$, $A\subset X$ פתוחה אמ"מ לכל $x\in A$ קיים $\varepsilon>0$ כך, ש- $B_\varepsilon(x)\subset A$.

**הגדרה**- אם $(X,\Omega)$ מרחב טופולוגי (נקרא מטריזבילי) אם קיימת מטריקה $\rho$ כך, ש- $\Omega=\Omega_\rho$.

**דוגמאות**- (1) טופולוגיה ב- $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}$ הרגילה עם המטריקה הסטנדרטית $(\mathbb{R},|\cdot|)$

(2) טופולוגיה דיסקרטית $\{X,2^X\}$, $\Omega=2^X$, איזה מטריקה ניקח?
$\rho(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$ המטריקה הדיסקרטית.

(3) (תרגיל) $|X|<\infty$ $(X,\Omega)$ מטריזבילי אמ"מ $\Omega=2^X$.

(4) (תרגיל) $|X|=\infty$ $\Omega$ קו סופית (קבוצה סגורה אמ"מ זה $X$ או סופית) להוכיח שמרחב זה לא מטריזבילי.

**תת מרחב טופולוגי**

**הגדרה (טענה)** $(X,\Omega)$ מרחב טופולוגי $A\subset X$ (נגדיר) $\Omega_A=\{A\cap V: V\in\Omega\}$
$\Omega_A$ טופולוגיה ב- $A$ ו- $(A,\Omega_A)$ (נקרא) תת מרחב טופולוגי של $(X,\Omega)$

הוכחה- (1), (2) של הגדרת טופולוגיה טריוויאלי כי $\phi=A\cap\phi$ $A=A\cap X$

• אם $U_1,U_2\in\Omega_A$ קיימות $V_1,V_2\in\Omega$ כך ש- $U_1=A\cap V_1$ , $U_2=A\cap V_2$ ואז

$$U_1\cap U_2 = A\cap V_1\cap A\cap V_2 = A\cap \underbrace{(V_1\cap V_2)}_{\in\Omega} \in \Omega_A$$

• יהי אוסף קבוצות $U_\alpha\in\Omega_A$ אז קיימות $V_\alpha\in\Omega$ כך ש- $U_\alpha=A\cap V_\alpha$

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(V_\alpha\cap A) = A\cap \underbrace{\left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right)}_{\in\Omega} \in \Omega_\alpha$$

<u>טענה</u>- אם $\beta$ בסיס של $\Omega$ אז $\beta_A=\{A\cap V : V\in\beta\}$ בסיס של $\Omega_A$.

<u>הוכחה</u>- ברור שהאיחוד של כל $\beta_A$ מכסה את כל $A$. כלומר, $\bigcup_{U\in\beta_A} U = A$.

מספיק להוכיח שכל קבוצה פתוחה (נוצרת מ-) קבוצות מבסיס.

יהי $U\in\Omega_A$ כלומר קיים $V\in\Omega$ כך ש- $U=A\cap V$. $\beta$ בסיס של $\Omega$

ואז $V=\bigcup_{w\in\beta, w\subset V} w$ (לפי הגדרה של בסיס) וזה לא בדיוק $U$ נקבל-

$$U = A\cap\left(\bigcup_{w\in\beta, w\subset V} w\right) = \bigcup_{w\in\beta, w\subset V} \underbrace{(A\cap w)}_{\in\beta_A,\ w\subset U}$$

מספיק לבחור איחוד של איזשהן קבוצות מתוך בסיס זה ולכן זה מספיק.

1. אם $A$ פתוחה אז $U\in\Omega_A$ אמ"מ $U\subset A$ ו- $U$ פתוחה ב- $X$ (שיעור טופולוגיה)
2. אם $A$ סגורה, אז $W\subset A$ סגורה בטופולוגיה של מרחב $A$ אמ"מ היא סגורה ב- $X$.

<u>דוגמא</u>- $\mathbb{R}$ , $A=[0,1)$ קבוצות פתוחות מאיזים שלא יהיו פתוחות אם מדבר כאן קבוצות פתוחות רגילות.