הרצאה מס' 16 5/11/18

משפט- (X,Ω) מרחב טופולוגי $K\subset X$ קומפקטית $f\in C(X,\mathbb{R})$ אז קיימים $a=\min_{x\in K} f(x)$,$b=\max_{x\in K} f(x)$.

הוכחה- $f(K)\subset\mathbb{R}$, תמונה של קומפקטית הינה קומפקטית. $\mathbb{R}$ הוא מרחב מטרי ולכן $f(K)$ סגורה וחסומה.

$-\infty < a := \inf_{x\in K} f(x) \le \sup_{x\in K} f(x) := b < \infty$, $f(K)$ סגורה ולכן $a,b\in f(K)$

- אם בנוסף K קשירה אז $f(K)=[a,b]$

הגדרות- (1) מרחב (X,Ω) נקרא קומפקטי מקומי (לוקאלי) אם לכל $x\in X$ קיימת סביבה $x\in U\in\Omega$ כך ש $\bar{U}$ קומפקטית.

(2) (X,Ω_X), (Y,Ω_Y) מרחב טופולוגי האוסדורף (Y,Ω_Y) קומפקטי, $f\in C(X,Y)$.

(f,Y) נקרא קומפקטיפיקציה של (X,Ω) אם:

א) f הומיאומורפיזם בין X ו- $f(X)$

ב) $\overline{f(X)}=Y$

ג) (Y,Ω_Y) קומפקטי

משפט- $(X,\Omega)\in T_2$ קומפקטי מקומי אז קיימת קומפקטיפיקציה $f:X\to Y$ כך ש $|Y\setminus f(X)|=1$ ו- $Y\in T_2$.

הוכחה- $y = X\cup\{w\}$ $w\notin X$ ונגדיר $\Omega_y = \Omega_X \cup \{\{w\}\cup V \mid V\subset X,\ X\setminus V \text{ קומפקטית}\}$

וניקח $f(x)=x$ לכל $x\in X$.

נראה כי Ω_y טופולוגיה - כאשר נראה סגירות לאיחוד: ניקח $U_\alpha\subset\Omega_y$ צ"ל $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\in\Omega_y$

נסמן $A'=\{\alpha\mid U_\alpha\subset X\}$, $A''=\{\alpha\mid w\in U_\alpha\}$

$U'=\bigcup_{\alpha\in A'}U_\alpha\in\Omega_X$ קבוצה פתוחה כאיחוד של פתוחות

כעת נניח כי $\alpha_0\in A''$ ולכן קיימת K קומפקטית כך ש $U_{\alpha_0}=[X\setminus K]\cup\{w\}$ ולכל $\alpha\in A''$ קיימת

K_α קומפקטית כך ש $K_\alpha=X\setminus U_\alpha$, $\bigcup_{\alpha\in A''}U_\alpha=\{w\}\cup(X\setminus\bigcap_{\alpha\in A''}K_\alpha)$

מתקיים כי $U''=\bigcap_{\alpha\in A'}K_\alpha\subset K_{\alpha_0}$ סגורה ולכן גם קומפקטית

$X\setminus(U'\cup U'')\subset X\setminus U''$ סגורה ולכן קומפקטית $\Longrightarrow$ יש סגירות לאיחוד.

סגירות לחיתוך: אם $V_1,V_2\in\Omega_y$ ו- $V_1\subset X$ אז $V_1\cap V_2=\underbrace{V_1}_{\in\Omega_X}\cap\underbrace{(V_2\cap X)}_{\in\Omega_X}\subset\Omega_X$

$w\in V_2, w\in V_1$ ומתקיים $(X\setminus V_1)\cup(X\setminus V_2)=(X\setminus(V_1\cap V_2))$ קומפקטי ולכן יש סגירות ולכן Ω_y טופו.

כעת נראה כי y קומפקטי -

נניח $U_\alpha\subset\Omega_y \Rightarrow y=\bigcup U_\alpha$, יהי U_α ונרצה להוכיח כי הוא תת כיסוי סופי.

קיים α_0 כך ש $w\in U_{\alpha_0}$, $K:=X\setminus U_{\alpha_0}$ קומפקטית מהגדרת Ω_y. $K\subset\bigcup_{\alpha\in A}\underbrace{(U_\alpha\cap X)}_{\in\Omega_X}$ ולכן ל-K יש תת כיסוי

סופי $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_N}$ ואז $y=\bigcup_{j=0}^{N}U_{\alpha_j}$.

$f(x)=x$ אז $f^{-1}(U)=U\cap X$, $U\cap X\in\Omega_X$ כשקבוצה קומפקטית בהאוסדורף סגורה ולכן $K^c\in\Omega_X$

לכל $V\in\Omega_y$ מתקיים $f^{-1}(V)=V\in\Omega_y$.

$\Leftarrow$ X לא קומפקטי (אחרת הקומפקטיות אין צורך בקומפקטיפיקציה) אם לכל סביבה U של w קיים $K\subset X$

קומפקטית $(K\neq X)$ כך ש $U=\{w\}\cup[X\setminus K]$ אז $X\setminus K=\phi$, $U\cap X=\phi$.

כעת נראה כי $(y,\Omega_y)\in T_2$, ניקח $x\in X$, w (אחרת טריוויאלי) נראה שאפשר להפריד ע"י קבוצות פתוחות

כלומר שקיימים $U,V\in\Omega_y$ כך ש $x\in V$, $w\in U$, $U\cap V=\phi$

X קומפקטי מקומי ולכן קיימת סביבה $x\in V\subset\Omega_X$ כך ש $\bar{V}\subset X$ קומפקטית ולכן $U=w\cup(X\setminus\bar{V})\in\Omega_y$

$w\in U$, ומאופן ההגדרה $U\cap V=\phi$ ולכן האוסדורף.

מכפלה של מרחבים טופולוגיים

(X,Ω_X), (y,Ω_y) מרחבים טופולוגיים, $Z=X\times y$. בסיס של טופולוגיה Ω_Z מוגדר כך -

$\{U\times V\mid U\in\Omega_X, V\in\Omega_y\}$

זה מוגדר בסיס כי - $(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$

טענה- (א) $X\times y\sim y\times X$

(ב) $X\times(y\times Z)=(X\times y)\times Z$

נסתכל על $X\times y\times Z$, $B=\{U\times V\times W\mid U\in\Omega_X, V\in\Omega, W\in\Omega_W\}$ נראה כי B בסיס הטופולוגיה של המרחב $(X\times(y\times Z))$

נשים לב כי $V\times W\in\Omega_{Y\times Z}$ אז $U\times(V\times W)\in\Omega_{X\times(Y\times Z)}$ ולכן כל הקבוצות ב-B פתוחות

כלומר $B\subset\Omega_{X\times(Y\times Z)}$. כעת נראה שלכל $z_0=(a,b,c)\in X\times(Y\times Z)$ ולכל סביבה $z_0\in A\subset\Omega_{X\times(Y\times Z)}$

קיימת $B\in B$ כך ש $z_0\in B\subset A$ (כלומר גם הגדרת בסיס). מהגדרת המכפלה, קיימים $U\in X$, $a\in U$

ו $C\in\Omega_{Y\times Z}$ כך ש $(b,c)\in C$, $(b,c)\in C\subset\Omega_{Y\times Z}$, $U\times C\subset A$ ולכן קיימים $V\in\Omega_Y$, $W\in\Omega_Z$

כך ש $(b,c)\in V\times W\subset C$ ואז $(a,b,c)\in U\times V\times W\subset A$.

טענה - $A\subset X$ סגורה, $B\subset Y$ סגורה אז $A\times B\subset X\times Y$ סגורה.

הוכחה - $\Omega_{X\times Y}$ פתוח כי X פתוח ומשלים של B פתוח $(X\times B^c\in\Omega_{X\times Y})$

מאותה הסיבה מתקיים כי $A^c\times Y\in\Omega_{X\times Y}$

ומתקיים כי $(A\times B)^c=\underbrace{(A^c\times Y)}_{\text{פתוח}}\cup\underbrace{(X\times B^c)}_{\text{פתוח}}$

מכאן ש $A\times B$ סגורה.

תרגיל - $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$

הגדרה - $\Pi_X:X\times Y\to X$, $(x,y)\mapsto x$, $\Pi_Y:X\times Y\to Y$, $(x,y)\mapsto y$

נטען כי $\Pi_X\in C(X\times Y,X)$, $\Pi_Y\in C(X\times Y,Y)$

טענה - $f\in C(X,Y)$ $G=\{(x,y)\in X\times Y\mid f(x)=y\}$.

טענה - $\Pi_X|_G:G\to X$ הומאומורפיזם

ראשית, מתורת הקבוצות זה העתקה חח"ע ועל (כי f פונקציה) ראינו כי $\Pi_X|_G\in C(G,X)$

נותר לבדוק כי $\varphi(x)=(x,f(x))$ רציפה כאשר $\varphi:X\to G$. נראה רציפות בנק'. יהי $a\in X$ נסמן $b=f(a)$

ויהי כי $\varphi(a)=(a,b)\in V_0\in\Omega_G$ צ"ל כי קיימת $a\in U\in\Omega_X$ כך ש $\varphi(U)\subset V_0$

$V_0\in\Omega_G$ לכן קיימת $V\in\Omega_{X\times Y}$ כך ש $V_0=V\cap G$ (טופ' מושרית)

$(a,b)\in V\in\Omega_{X\times Y}$ אז קיימים $A\in\Omega_X$, $B\in\Omega_Y$ כך ש $(a,b)\in A\times B\subset V$ כי זה הבסיס של טופו' מכפלה

$f\in C(X,Y)$ ואז $a\in f^{-1}(B)\in\Omega_X$, $a\in A$, $\underbrace{a\in A\cap f^{-1}(B)}_{=:U}\in\Omega_X$ אם $x\in U$ אז $x\in A$

וגם $f(x)\in B$ לכן לכל $x\in U$ מתקיים -

כלומר $\varphi(x)\in A\times B\subset V$ (לפי ההגדרה של $\varphi(x)$ לעיל). $\varphi(x)\in G$ ולכן $\varphi(x)\in V_0$

מסקנה חשובה - $b\in Y$ אז $X\times\{b\}\subset X\times Y$ הומאומורפי ל-X ע"י $\Pi_X|_{X\times\{b\}}$ כאשר $f(x)=b$ זהותית