$f_{n,k}(x)=0<1 \Rightarrow x\in V_{(n,k)}$

$f_{n,k}(X\setminus U_k)=1 \Leftarrow x\notin U_k \Rightarrow x\notin V_{n,k} \Rightarrow V_{n,k}\subset U_k\subset U$

26/11/18   הרצאה מס' 13

משפט של אוריסון - יהי (X,Ω) מרחב האוסדורף רגולרי C_2 אז X מטריזבילי

הוכחה - $U_1,U_2,\ldots$ בסיס בן מניה של הטופולוגיה. נגדיר סדרת קבוצות מספרים $M=\{(n,m)\mid U_n\subset\overline{U_n}\subset U_m\}$ (יכולה בעקרון להיות ריקה, בהמשך נשלול). תנאי של רגולריות של מרחב נותן שכל נקודה אפשר להפריד מקבוצה סגורה, את זה ניתן לנסח בדרך אחרת, תהי קבוצה פתוחה $x\in U$ אז קיימת סביבה V $x\in V\subset\overline{V}\subset U$ (תנאי שקול לרגולריות)

לכל $(n,m)\in M$ לפי תנאי $\phi=\underset{\text{סגורה}}{\overline{U_n}}\cap \underset{\text{סגורה}}{X\setminus U_m}$ ולכן מהלמה של אוריסון קיימת פונקציה $f_{n,m}\in C(X,[0,1])$

$f_{n,m}|_{\overline{U_n}}=0$ ו- $f_{n,m}|_{X\setminus U_m}=1$.

קיבלנו סדרה של פונקציות, נראה שזו סדרה מאוד עשירה של פונקציות.

לכל $x\in X$ ולכל $x\in U\in\Omega$ כיוון ש $U_1,U_2,\ldots$ בסיס אז קיים מס' $m\in\mathbb{N}$ כך ש $x\in U_m\subset U$

ומתנאי של רגולריות קיימת V פתוחה כך ש- $x\in V\subset\overline{V}\subset U_m$ ושוב מכיוון ש $U_1,U_2,\ldots$ בסיס אז קיים n כך ש $x\in U_n\subset V$ ואז מתקיים $x\in U_n\subset\overline{U_n}\subset U_m$ במקרה זה $f_{n,m}(x)=0$ והקבוצה $\{y\mid f_{n,m}(y)<1\}\subset U$. כעת יש סדרה בת מניה של פונקציות לכן ניתן "לסדר" אותה.

קיבלנו - $k\in\mathbb{N}$, f_k עם תכונה הבאה - לכל $x\in X$ כך שלכל $U\in\Omega$, $x\in U$ קיים k כך ש $f_k(x)=0$ (#)

$V_k=\{y\mid f_k(y)<1\}\subset U$ (סימנו (n,m) ב- k)

כעת, נזכר שבתחילת הקורס הגדרנו $\ell_1\ni(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$ $a_n\in\mathbb{R}$ כך ש $\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ והגדרנו מטריקה עבור $a,b\in\ell_1$ $d(a,b)=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|$ ו ℓ_1 מרחב מטרי.

נבנה העתקה ממרחב X למרחב ℓ_1 ונבדוק שהיא הומאומורפיזם ומכאן נקבל את הדרוש.

נגדיר לכל $x\in X$ $F(x)=\left(f_1(x),\frac{f_2(x)}{2},\ldots\frac{f_n(x)}{2^n}\right)$ ומתקיים $f_n(x)\in[0,1]$ $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{f_k(x)}{2^k}\right|<\infty$ לכן התמונה ב ℓ_1, נבדוק רציפות.

1. F רציפה מ- X ל- ℓ_1. צריך לבדוק עבור $\varepsilon>0$ כלשהו (נבדוק רציפות בנק' ספציפית)

תהי $x\in X$ קיימת סביבה $x\in U$ כך שלכל $y\in U$ $d(F(x),F(y))<\varepsilon$

נבחר n כך ש $\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{4}$. כעת לכל $y\in X$ מתקיים-

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f_k(x)}{2^k}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f_k(y)}{2^k}\right|<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $k\le n$ נגדיר W_k, כיוון ש f_k רציפה אזי

$f_k\in C(X,[0,1])$ קיימת סביבה $W_k\in\Omega$ כך שלכל $y\in W_k$ $|f_k(x)-f_k(y)|<\frac{\varepsilon}{4n}$ ונגדיר $U=\bigcap_{k=1}^{n}W_k$

לוקחים $y\in U$ שכונתו ונאמר

$$d(F(x),F(y)) = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{f_k(x)}{2^k}-\frac{f_k(y)}{2^k}\right| <$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{4n\cdot 2^k} + \underbrace{\sum \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{זנב}} < \varepsilon$$

2. נבדוק ש F חח"ע. יהיו $x\neq y$, מרחב X האוסדורף לכן קיימת סביבה $x\in U\in\Omega$ כך ש $y\notin U$

$(\#)\Leftarrow$ קיים k כך ש $f_k(x)=0$ ו $f_k(y)=1$ לפי כלל הקונסטרוקציה k ויש הבדל בתמונה ולכן $f(x)=F(y)$

3. נסמן $A=\mathrm{Im}F$ ונבדוק $F^{-1}\in C(A,X)$, כלומר לכל $a\in A$ ולכל סביבה U של $F^{-1}(a)\in U$ קיים $\delta>0$

כך שלכל $b\in A$ $d(a,b)<\delta$ מתקיים $F^{-1}(b)\in U$.

כיוון ש $a\in A$ קיים $x\in X$ כך ש $F(x)=a$, תהי $x\in U$ סביבה של X, קבוצה פתוחה לכן מ$(*)$

קיים n כך ש $f_n(x)=0$ ו $V_n\subset U=\{y \mid f_n(y)<1\}$. כעת צריך לבחור δ, נבחר $\delta=\frac{1}{2^n}$

נניח כי $b\in A$ כלומר קיים $y\in X$ כך ש $F(y)=b$ ונניח $d(a,b)<\frac{1}{2^n}$ אז

$$\frac{f_n(y)}{2^n} = \frac{f_n(x)-f_n(y)}{2^n} \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{f_k(x)-f_k(y)}{2^k}\right| < \frac{1}{2^n}$$ ולכן $f_n(y)<1$ כלומר $y\in U$.

קומפקטיות

הגדרה- מרחב (X,Ω) נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X קיים תת כיסוי סופי.

דוגמאות- (1) $|X|<\infty$ אז X קומפקטי

(2) $A=\{0,1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n}\}\subset R$ היא קבוצה קומפקטית, עם טופולוגיה מושרה מ R. אם יש כיסוי של A

בעזרת קבוצות פתוחות $A\subset\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ אז קיימת α_0: $0\in U_{\alpha_0}$ בסיס של טופולוגיה של R

קטעים פתוחים לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset U_{\alpha_0}$ $|A\setminus U_{\alpha_0}|<\varepsilon$ ולכן

מאלף I מקבלים קומפקטיות