19/11/18

הרצאה מס' 11 - טופולוגיה

תזכורת - אקסיומות מנייה

C_2 - קיים בסיס בן מנייה

C_1 - קיים בסיס בן מנייה מקומי. (לכל x קיים בסיס-סביבות של x בן מנייה)

ספרביליות - X ספרבילי אם קיימת בו קבוצה בת מנייה וצפופה בו.

ברור כי $C_2 \Rightarrow C_1$.

ספרביליות $\Leftarrow C_2$: $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ בסיס של טופולוגיה Ω. לפי אינדוקציה נבחר $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, ..., $x_n \in U_n$, ... והטענה היא ש-$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ צפופה ב-X. מה צ"ל צפופה? שלכל קבוצה פתוחה לא ריקה נחתך (לא ריק) עם הקבוצה הצפופה.
תהי $U \in \Omega$ קבוצה פתוחה, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס של Ω אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$U_n \subset U$ ואז $x_n \in U$ כלומר $\{x_n\} \cap U \neq \emptyset$ ולכן $\{x_n\}$ צפופה.

הערה - C_1 לא גוררת ספרביליות.

טענה - אם X מרחב ספרבילי, $X \in C_1$ אז $X \in C_2$ (טענה לא נכונה)

הוכחה - X ספרבילי, יש קבוצה בת מנייה וצפופה. כלומר, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ צפופה ב-X. בנוסף, X מקיים אקסיומת C_1, כלומר ל-x_1 יש בסיס של סביבות של x_1 נסמן ב-$\{U_{1,n}\}$ ולכל x_k יש בסיס סביבות $\{U_{k,n}\}$ בסיס סביבות של x_k. ואז $\{U_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{\infty\ \infty}$ בסיס של טופולוגיה. צריך לבדוק שלכל קבוצה פתוחה יש בפנים קבוצה מהבסיס. תהי $\emptyset \neq U \in \Omega$, כיוון ש-$\{x_n\}$ צפופה, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$x_k \in U$, U היא סביבה של x_k ו-$\{U_{k,n}\}$ בסיס סביבות של x_k ולכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$U_{k,n} \subset U$. צריך לבדוק שהם באיחוד נותנים את כל X - (בתרגיל זה כשל).

טענה - מרחב מטרי הוא C_1.

הוכחה - $x \in X$ $B_{\frac{1}{n}}(x)$ ...

טענה - X מטרי ספרבילי אז הוא C_2

הוכחה - $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_{k} B_r(x_k)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x_1) = X$.

טענה - $\Omega \subset \Omega'$, X קבוצה. אם X ספרבילי לפי Ω' אז (X,Ω) ספרבילי.

הוכחה - ברור.

הערה- C_2, C_1 לא נובע מהטענה הקודמת.

דוגמה- (תמונה כנ"ל) $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה רגילה וטופולוגיה קו-סופית.

ל- $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה רגילה יש בסיס סביבות בן מנייה. נניח כי- $0\in U_n$ כאשר U_n בטופולוגיה קו-סופית, ונקבל $(\bigcap U_n)^c = \bigcup_n (U_n)^c$

אז קיימת $z\notin(\bigcap U_n)^c$ ולכן $\bigcap_n U_n \not\subset \{z\}^c$.

כלומר מראים שאם הקבוצה לא בת מנייה אז טופולוגיה קו-סופית לא מקיימת אקסיומת C_1

טענה- X ספרבילי, $f\in C(X,Y)$ אז $f(X)$ ספרבילי.

הוכחה- $\{x_n\}$ צפופה ב-X אז $\{f(x_n)\}$ צפופה ב-$f(X)$.

משפט Lindelof $(X,\Omega)\in C_2$, $U_\alpha\in\Omega$, $\alpha\in A$ ו- $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$

אז קיים תת כיסוי בן מנייה של X. כלומר קיימת $A_0\subset A$, $|A_0|\le\aleph_0$ ו- $\bigcup_{\alpha\in A_0}U_\alpha = X$

הוכחה. $(X,\Omega)\in C_2$, כלומר קיים בסיס של טופולוגיה Ω בן מנייה, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סימונו.

נגדיר $M := \{n\in\mathbb{N} \mid \exists \alpha\in A\ V_n\subset U_\alpha\}$. לכל $n\in M$ (נבחר לפי אינדוקציה) α_n כך ש- $V_n\subset U_{\alpha_n}$. נוכיח $\bigcup_{n\in M} U_{\alpha_n}=X$, יהי $x\in X$ מאחר ש- $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ אז קיים $\alpha\in A$ כך ש- $x\in U_\alpha$, $\{V_n\}$ בסיס ולכן קיים $k\in M$ ולכן $x\in V_k\subset U_{\alpha_k}$

ולכן $x\in\bigcup_{n\in M}U_{\alpha_n}$.

הגדרה של התכנסות- $x_n\to x$ אם לכל סביבה U של x קיים N כך שלכל $n\ge N$ $x_n\in U$.

הגדרה- $A\subset X$ (X,Ω) סגור סדרתי של A, זה הקבוצה של גבולות של סדרות מאיברים מ-A. מסומן ב- $S.cl(A)$.

טענה- אם $X\in C_1$ אז $S.cl(A)=\bar{A}$

הוכחה- אם $\{x_n\}\subset A$ ו- $x_n\to x$, אז $x\in\bar A$ (x נק' הצטברות). $S.cl(A)\subset\bar A$.

בכיוון השני- יהי $x\in\bar A$ $\Rightarrow$ לכל $x\in U\in\Omega$ $U\cap A\ne\emptyset$, מאחר ש-$(X,\Omega)\in C_1$ קיימת