14/11/18

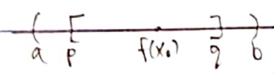
הרצאה מס' 10 - טופולוגיה

תזכורת + סיום הוכחה - הלמה של אוריסון

(X,Ω) מרחב נורמלי (T_4), $A,B\subset X$, $A\cap B=\emptyset$, סגורות, אז קיימת $f\in C(X,[0,1])$
כך ש- $f|_A=0, f|_B=1$.

לכל מס' דיאדי $p\in D\subset \mathbb{Q}$, מצאנו סדרה של קבוצות $\underset{\text{פתוחה}}{U_p}\subset \underset{\text{סגורה}}{F_p}$ והן מונוטוניות, אם $p<q$
$U_p\subset F_p\subset U_q\subset F_q$, $A\subset U_0$, $U_1\subset X\setminus B$ ואם $p<0$, $U_p=\emptyset$, ואם $p>1$ $U_p=X$.
(כנ"ל לגבי F_p) ואח"כ בעזרת המשפחה הזו הגדרנו פונקציה, $f(x)=\inf\{p \mid x\in U_p\}$
והיינו צריכים להוכיח שפונק' f מקיימת תכונות אלו- מתקיים $f|_A=0$, $f|_B=1$, ברור כי
$\mathrm{Im} f\in[0,1]$ ונותר להוכיח רציפות של פונקציה זו.

והייתה לנו טענה (2) אם $x\in F_p$ אז $f(x)\le p$, ואם $x\notin U_p$ אז $f(x)\ge p$.
(נוכיח רציפות: יהי $x_0\in X$, צ"ל: אם $f(x_0)\in(a,b)$ אז $\exists$ $x_0\in V_{\text{פתוחה}}\subset f^{-1}(a,b)$.
ניזכר שהראנו כאן השימוש של מספרים דיאדיים, D צפופה ב- $\mathbb{R}$ אז קיימים
p,q כך ש- $a<p<f(x_0)<q<b$, וכעת נגדיר קבוצה V-



$$V:=U_q\setminus F_p \underset{\text{מונוטוניות}}{\subset} F_q\setminus U_p$$

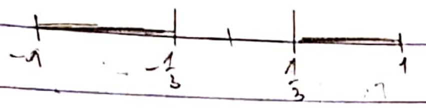
נצטרך להוכיח 2 דברים- 1. ראשית ש- $V\subset f^{-1}(a,b)$ כלומר לכל $z\in V$, $f(z)\in(a,b)$
2. $x_0\in V$

(הוכחה- 1. (נניח) $z\in V$ אז $z\in F_q$ אז מחלק ראשון $f(z)\le q<b$
$z\in V$ אז $z\notin U_p$ אז מחלק שני של טענה $a<p\le f(z)$
2. $f(x_0)<q$ אז מהגדרה מחלק שני של טענה, $x_0\in U_q$
$f(x_0)>p$ אז מהגדרה מחלק ראשון של טענה, $x_0\notin F_p$ ולכן $x_0\in U_q\setminus F_p=V$
וסיימנו.

משפט Tietze

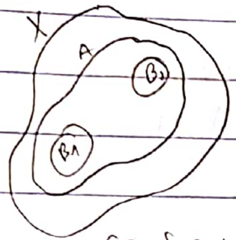
$(X,\Omega)\in T_4$ (האקסיומה נורמלי), $A\subset X$ סגורה, $f\in C(A,[-1,1])$ אז קיימת
$g\in C(X,[-1,1])$ כך ש- $g|_A=f$

הוכחה- במהלך ההוכחה נשתמש בכמה טענות עזר- אם $f_0\in C(X,[0,1])$ אם $f_0=\frac{1}{3}f$
אז גם $f\in C(X,[0,1])$. (נשתמש בזה ע"י קירובים של g. המשך $\leftarrow$



נגדיר - $B_1 = f^{-1}([-1,\frac{1}{3}])$

$B_2 = f^{-1}([\frac{1}{3},1])$



$B_1 \cap B_2 = \phi$, ועכשיו אנו מגיעים של למה של אוריסון, קיימת פונק' $\varphi \in C(X,[0,1])$ כך ש- $\varphi|_{B_1}=0$, $\varphi|_{B_2}=1$.

נגדיר $g_1 = \frac{2}{3}(\varphi(x)-\frac{1}{2})$ אזי $g_1(x) \in [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, $g_1|_{B_1}=-\frac{1}{3}$, $g_1|_{B_2}=\frac{1}{3}$

אזי $|f(x)-g_1(x)| \le \frac{2}{3}$ (נוכיח לכל $x\in A$ יכולים להיות 3 מקרים, אפשר לבדוק)

כעת, נגדיר $f_1 = \frac{3}{2}(f-g_1)$ מוגדרת על A, רציפה. (סמן ψ קירוב של פונקציה f_1 ..

$|f_1-\psi| \le \frac{2}{3}$, $|\psi| \le \frac{1}{3}$, ψ רציפה על X, כי הוכחנו טענה עבור $f \in C(A,[-1,1])$

קיים ψ כך, ש- $\psi \in C(X,[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}])$ כך ש- $|f(x)-\psi(x)| \le \frac{2}{3}$ $\forall x\in A$. מגיעה פורמלית-

אז על סמך טענה זו $g_1=\psi$ לאותה פונקציה f.

נגדיר פונקציה $f_1 = \frac{3}{2}(f-g_1)$, f_1 מקיימת תנאים של טענה ($f_1 \in C(A,[-1,1])$) לכן עבור f_1 קיימת ψ_1, $\psi_1 \in C(X,[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}])$ כך ש- $|f_1-\psi_1| \le \frac{2}{3}$ $\forall x\in A$

כעת, נגדיר g_2 (ע"י נוסח) $g_2=\frac{2}{3}\psi_1$ ואז $|f-g_1-g_2| = |\frac{2}{3}(f_1-\psi_1)| \le (\frac{2}{3})^2$

כעת, $f_2 = (f-g_1-g_2)(\frac{3}{2})^2$ אז מטענה, קיימת ψ_2 כך ש- $|\psi_2| \le \frac{1}{3}$ ומתקיים $|f_2-\psi_2| \le \frac{2}{3}$, $g_3=(\frac{2}{3})^2\psi_2$, $|g_3| \le (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3}$ ואז- $|f-g_1-g_2-g_3| = |(\frac{2}{3})^2(f_2-\psi_2)| \le (\frac{2}{3})^3$

ונמשיך באינדוקציה באותה צורה, קיבלנו סדרה $g_n \in C(X,\mathbb{R})$, $|g_n| \le \frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}$

ובנוסף, $|f(x)-\sum_{k=1}^{n} g_k(x)| \le (\frac{2}{3})^n$ $\forall x\in A$, M-ה מבחן $\sum g_n$ מתכנס במ"ש כלומר,

$g=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ב $C(X,\mathbb{R})$, ומהגדרתנו שקיבלנו, $g|_A=f$.

לכל $x\in X$, $|g(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty}|g_k(x)| \le \frac{1}{3}(1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+..) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$

וסיימנו.

<u>נכונה שימוש של משפט - עקומה של פאנו</u> אנחנו נוכיח כך ש- $f \in C([0,1],\mathbb{R}^2)$ כך ש- $Imf=[0,1]^2$

(מקום רינגוס)

<u>קבוצת קנטור</u> $C_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$, $\alpha_1(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,\frac{1}{3}] \\ 1 & x\in[\frac{2}{3},1] \end{cases}$ פונקציה רציפה ב- C_1

$C_1 \supset C_2 = [0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{6}{9},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$, $\alpha_2(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,\frac{1}{9}] \\ 1 & x\in[\frac{2}{9},\frac{3}{9}] \\ 0 & x\in[\frac{6}{9},\frac{7}{9}] \\ 1 & x\in[\frac{8}{9},\frac{9}{9}] \end{cases}$, $\alpha_2 \in C(C_2,\mathbb{R})$

⋮

ממשיכים
באותו
אופן

מקבלים קבוצה חדשה C_n ומגדירים $\alpha_n(x)$ באותו אופן.

קיבלנו סדרה של קבוצות סגורות מונוטונית $C_1 \supset C_2 \supset ..$ וקבוצת קנטור

$C=\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ סגורה, $\alpha_n(x) \in C(C,\mathbb{R})$

כעת, נגדיר $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(x)}{2^k}$ שוב מסקנת M-מבחן, $\varphi\in C(C,\mathbb{R})$, φ על

$[0,1]$ כי כל נק' מ- $[0,1]$ ניתן לפתח בצורה בינארית ויש נק' מקבילה בקבוצת קנטור המתאימה.

רצוי להפוך אותה לרציפה על $[0,1]^2$, נגדיר $\Psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k+1}(x)}{2^k}$, $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}(x)}{2^k}$

אז $f(x)=(\varphi(x),\Psi(x))$, $f\in C(C,\mathbb{R}^2)$

f על $[0,1]^2$, ממשפט Tietze אפשר להרחיב $\tilde{\varphi}\in C([0,1],\mathbb{R})$

$\tilde{\varphi}|_C=\varphi$ ו- $\tilde{\Psi}\in C([0,1],\mathbb{R})$, $\tilde{\Psi}|_C=\Psi$ ואז $G(x)=(\tilde{\varphi}(x),\tilde{\Psi}(x))$

כאשר $G:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ $G|_C$ היא על ולכן G היא על.

אקסיומות מנייה

הגדרות- (1) $(X,\Omega)\in C_2$ אם קיים בסיס B של Ω בן מנייה.

(2) מקומית קיים בסיס בן מנייה. כלומר, לכל $x\in X$ קיימת סדרה של קבוצות פתוחות $\{U_1,U_2,\dots,U_n,\dots\}$ $x\in U_k\ \forall k$ כך שלכל סביבה V של x קיים n כך ש- $U_n\subset V$, זה הגדרה ל- $(X,\Omega)\in C_1$.

(3) (X,Ω) ספרבילי אם קיימת $A\subset X$ בת מנייה וצפופה ב- X.

טענה: $C_2\Rightarrow C_1$. (מיידית - תרגיל)

טענה- $Y\subset X$ אם $X\in C_2(C_1)$ אז גם $Y\in C_2(C_1)$

הוכחה- (עבור לגבי C_2). לכל $V\in\beta$ אם β זה בסיס של טופולוגיה Ω ב- X נגדיר $Y\cap V=\tilde{V}$ אז לפי סמך הגדרה של טופולוגיה משרית אז האוסף $\{\tilde{V}\}$ מהווה בסיס לטופולוגיה משרית ב- Y, כלומר $\{Y\cap V\}_{V\in\beta}$ בסיס בן מנייה של Ω_Y.

ובה"נ לגבי C_1.

דוגמה - ספרביליות לא עובר בירושה.

נניח $|X|>\aleph_0$ ו- $\Omega=2^X$, אז (X,Ω) לא ספרבילי.

נגדיר $Y=X\cup\{w\}$ (מוסיפים נק' כלשהי), ונגדיר טופולוגיה שבה $V=\emptyset$ או $w\in V \iff V\in\Omega_Y$

קל לראות שזו טופולוגיה ומתקיים Y הוא ספרבילי, כי $\overline{\{w\}}=Y$ לכן Y ספרבילי

ו- $X\subset Y$ טופולוגיה ב- X כטופולוגיה משרית והיא דיסקרטית.