15/10/18

הרצאה מס' 1 - טופולוגיה

הגדרה - תהי X קבוצה. $\Omega \subset 2^X$ נקראת טופולוגיה אם:

(1) $\phi, X \in \Omega$

(2) $U_\alpha \in \Omega$ אז $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \Omega$ (סגור ביחס לאיחוד)

(3) $U, V \in \Omega$ אז $U \cap V \in \Omega$ (סגור ביחס לחיתוך סופי)

$U \in \Omega$, U נקראת קבוצה פתוחה.

דוגמאות - (1) $\mathbb{R}$ או $X = \mathbb{R}^n$

(2) טריוויאלית $\Omega = \{\phi, X\}$

(3) טופולוגיה בדידה/דיסקרטית $\Omega = 2^X$

(4) קו-סופית $U \subset X$ (ו-ϕ) פתוחה אם $X \setminus U$ קבוצה סופית.

הגדרה - $F \subset X$ סגורה אם $X \setminus F \in \Omega$ (כלומר אם המשלים קבוצה פתוחה)

$\mathcal{F} \subset 2^X$ אוסף של קבוצות סגורות אז-

(1) $\phi, X \in \mathcal{F}$

(2) $F_\alpha \in \mathcal{F}$ אז $\bigcap_\alpha F_\alpha \in \mathcal{F}$

(3) $F, G \in \mathcal{F}$ אז $F \cup G \in \mathcal{F}$

דוגמה - טופולוגיה Zariski ב-$\mathbb{R}^2$. הקבוצה $F \subset \mathbb{R}^2$ סגורה אם קיים פולינום P כך ש- $F = \{(x,y) : P(x,y) = 0\}$

הגדרה - בסיס של טופולוגיה: תהי $\Omega \subset 2^X$ טופולוגיה. $\mathcal{B} \subset \Omega$ נקרא בסיס של Ω אם לכל $U \in \Omega$ קיימת $\Gamma \subset \mathcal{B}$ כך ש- $U = \bigcup_{V \in \Gamma} V$.

לדוגמא- ב-$\mathbb{R}$ בסיס הוא (a,b) - כל קבוצה פתוחה אפשר לכתוב כאיחוד של קטעים פתוחים.

טענה - התנאים הבאים שקולים - (1) $\mathcal{B}$ בסיס של Ω

(2) לכל $U \in \Omega$ מתקיים $U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}, V \subset U} V$

(3) לכל $U \in \Omega$ לכל $x \in U$ קיים $V \in \mathcal{B}$ כך ש- $x \in V \subset U$.

הוכחה-

• $1 \Rightarrow 2$, (נגדיר) $\Gamma = \{V\in\beta : V\subset U\}$

• $2 \Rightarrow 1$, $U=\bigcup_{V\in\Gamma} V$ אז לכל $V\in\Gamma$ מתקיים $V\subset U$ ולכן-

$$\bigcup_{V\in\Gamma} V \subset \bigcup_{\substack{V\in\beta\\ V\subset U}} V \Rightarrow U \subseteq \bigcup_{\substack{V\in\beta\\ V\subset U}} \subset U$$

• $2 \Rightarrow 3$, יהי $x\in U$, לפי טענה 3, קיים $V\in\beta$ כך ש- $x\in V\subset U$ ולכן $x\in\bigcup_{\substack{V\in\beta\\ V\subset U}} V$. מכאן ש- x שרירותי ב- U מתקיים $U\subset\bigcup_{\substack{V\in\beta\\ V\subset U}} V$.

• $3 \Rightarrow 2$, $x\in U$, $x\in U=\bigcup_{\substack{V\in\beta\\ V\subset U}} V$ אז קיים $V\in\beta$, $V\subset U$ כך ש- $x\in V$.

טענה- אם β מקיימת- (1) $\bigcup_{V\in\beta} V = X$

(2) לכל $V_1,V_2\in\beta$ גם $V_1\cap V_2\in\beta$

אז קיימת טופולוגיה Ω כך ש- β בסיס שלה.

הוכחה- לכל $\Gamma\subset\beta$ (נגדיר $U_\emptyset=\emptyset$) $U_\Gamma=\bigcup_{V\in\Gamma} V$. אנחנו נטען כי $\Omega=\{U_\Gamma : \Gamma\subset\beta\}$ טופולוגיה.

צריך לבדוק אם $\Gamma_1,\Gamma_2\subset\beta$ אזי $U_{\Gamma_1}\cap U_{\Gamma_2}\in\Omega$?

$$U_{\Gamma_1}\cap U_{\Gamma_2} = \Big(\bigcup_{V\in\Gamma_1} V\Big)\cap\Big(\bigcup_{W\in\Gamma_2} W\Big) = \underbrace{\bigcup_{V\in\Gamma_1}\bigcup_{W\in\Gamma_2}}_{} (V\cap W) \underset{\text{טענה 2}}{\in} \Omega$$

(משתנה אינדקס זה למעשה $(V,W)\in\Gamma_1\times\Gamma_2$)
הערה - לא חובה

השוואה של טופולוגיות X, Ω_1,Ω_2 טופולוגיות, Ω_1 יותר גסה מ- Ω_2 אם $\Omega_1\subset\Omega_2$. Ω_2 יותר עדינה מ- Ω_1.

הטופולוגיה הכי גסה היא הטופולוגיה הטריוויאלית והטופולוגיה הכי עדינה היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

17/10/18

הרצאה מס' 2 - טופולוגיה

משפט - נניח $\beta \subset 2^X$ מקיימת תכונות -

(1) $\bigcup_{v\in\beta} v = X$

(2) $v_1\cap v_2 = \bigcup_{\substack{w\subset v_1\cap v_2 \\ w\in\beta}} w$

אז קיימת טופולוגיה Ω כך ש- β בסיס שלה.

הוכחה- נגדיר Ω באופן הבא- $\Omega=\{U_\Gamma=\bigcup_{v\in\Gamma} v \ : \ \Gamma\subset\beta\}$

אם $\Gamma=\emptyset \Rightarrow U_\emptyset=\emptyset$

אם $\Gamma=\beta \Rightarrow U_\beta=X$

$\{\Gamma_\alpha\}, \Gamma_\alpha\subset\beta$ אזי $U_{\bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in A} U_{\Gamma_\alpha}$ לפי הגדרה.

$\Gamma_1\subset\beta, \Gamma_2\subset\beta$, צ"ל ש- $U_{\Gamma_1}\cap U_{\Gamma_2}\in\Omega$: (רשום $U_{\Gamma_1}=\bigcup_{v_1\in\Gamma_1} v_1$

$U_{\Gamma_2}=\bigcup_{v_2\in\Gamma_2} v_2$ וגם חוקים של איחודים/חיתוכים-

$v_1\in\beta, v_2\in\beta \underset{\text{תכונה 2}}{\Rightarrow} v_1\cap v_2=\bigcup_{w\in\Gamma(v_1,v_2)} w$; $U_{\Gamma_1}\cap U_{\Gamma_2} = \bigcup_{v_1\in\Gamma_1}\bigcup_{v_2\in\Gamma_2}(v_1\cap v_2) \overset{(=)}{=}$

כאשר $\Gamma(v_1,v_2)=\{w : w\in\beta, w\subset v_1\cap v_2\}$

$\overset{(=)}{=} \bigcup_{v_1\in\Gamma_1}\bigcup_{v_2\in\Gamma_2}\bigcup_{w\in\Gamma(v_1,v_2)} w$

לסיכום, אם $\Gamma=\bigcup_{v_1\in\Gamma_1}\bigcup_{v_2\in\Gamma_2}\Gamma(v_1,v_2)\subset\beta$ אזי $U_{\Gamma_1}\cap U_{\Gamma_2}=\bigcup_{w\in\Gamma} w$ ∎

משפט- $\Omega_1\subset\Omega_2$ אמ"מ לכל $u\in\beta_1$ ולכל $x\in u$ קיים $v\in\beta_2$ כך ש- $x\in v\subset u$. כאשר (נתונים) β_1,Ω_1 , β_2,Ω_2.

הוכחה- נניח $\Omega_1\subset\Omega_2$, אז $u\in\Omega_2$, β_2 בסיס של טופולוגיה Ω_2 ולכן ניתן לתאר את u באופן הבא- $u=\bigcup_{\substack{v\subset\beta_2 \\ v\subset u}} v$, $x\in u$ לכן, מכאן קיימת

$\beta_2\ni v\subset u$ וכך סיימנו.

בכיוון ההפוך, ניקח $u\in B_1$, צ"ל $u\in\Omega_2$. ($B_1\subset\Omega_2$ נתון) $w=\bigcup_{\substack{v\in\beta_2 \\ v\subset u}} v$, $w\subset u$

ומהנתון משפט לכל $x\in u$ קיים $v\subset u$ כך ש- $v\in\beta_2$ ו- $x\in v$ אזי $x\in w$ וגם $u\subset w$, $w\subset\Omega_2$. ולכן סיימנו, מש"ל.

יהי $A \in \Omega_1$, $A = \bigcup_{\substack{U \in B_1 \\ U \subset A}} U$ כאשר $U \in \Omega_2$ (כי ראינו $B_1 \subset \Omega_2$) וטופולוגיה סגורה תחת

לאיחוד לכן $A \in \Omega_2$ ומכאן $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

דוגמה - $B_2 = \{[a,b) \subset \mathbb{R} : a<b\}$, $B_1 = \{(a,b) \subset \mathbb{R} : a<b\}$

איחוד של הקטעים הללו נותנים את כל $\mathbb{R}$.

(נשים ♡ כי $[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2)$ יהיה ריק או ϕ או $[c,d)$ כאשר

$c = \max\{a_1,a_2\}$, $d = \min\{b_1,b_2\}$. B_1 יוצר טופולוגיה Ω_1 ו- B_2

יוצר טופולוגיה Ω_2 והטענה היא ש- $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

$$(a,b) = \bigcup_{b \geq c > a} [c,b)$$

כל קבוצה ב- B_1 אפשר להציג ע"י איחוד של

קבוצות שגם הוא נמצא ב- B_2.

(בדקו צורך הקטעים סגורים- האם זהו בסיס והאם יוצר טופולוגיה ואיזה?)

רצינו להראות ש- $\Omega_1 \subset \Omega_2$ באמצעות הגדרה, ניקח $x \in (a,b)$

אזי קיים c כך ש- $a < c \leq x$, $x \in [c,b) \subset (a,b)$.

מרחב מטרי

יהי X קבוצה כלשהי, פונקציה $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, ρ נקראת מטריקה של X

אם מתקיימות -

1. לכל $x,y \in X$, $\rho(x,y) \geq 0$ ו- $\rho(x,y) = 0$ אמ"מ $x=y$.
2. פונקציה סימטרית $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ לכל $x,y \in X$
3. לכל $x,y,z \in X$ מתקיים אי"ש Δ: $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

(מילה נרדפת לפונקציה ρ זהו מרחק)

(X,ρ) - נקרא מרחב מטרי.

דוגמאות - (1) ב- $\mathbb{R}^2$ $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

או $\rho_1(x,y) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$

או $\rho_\infty(x,y) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$

$\rho_p(x,y) = (|x_1-x_2|^p + |y_1-y_2|^p)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$

(2) אפשר להכליל ל- $\mathbb{R}^n$ בצורה הברורה.

(3) יהי X קבוצה כלשהי. $\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

הערה- אם (X,ρ) -מרחב מטרי, אז $\sqrt{\rho}$ מטריקה. יש לבדוק רק א"ש △ כי השאר ברור. צ"ל $a\le b+c$ אז $\sqrt{a}\le\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ומספיק להראות כי $\sqrt{b+c}\le\sqrt{b}+\sqrt{c}$ וזו מסיימים.

גם $\min\{\rho,1\}$ גם כן מטריקה.

הגדרה- יהי מרחב מטרי (X,ρ), ויהי $a\in X$, $r>0$ $B_r(a)=\{x\in X:\rho(a,x)<r\}$
כדור פתוח עם מרכז ב-a ורדיוס r.

$D_r(a)=\{x\in X:\rho(a,x)\le r\}$ כדור סגור עם מרכז ב-a ורדיוס r.

$S_r(a)=\{x\in X:\rho(a,x)=r\}$ ספירה עם מרכז a ורדיוס r.

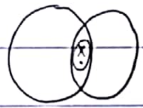
משפט (X,ρ) מרחב מטרי. $\mathcal{B}=\{B_r(a):r>0,a\in X\}$ בסיס של טופולוגיה (סמנה Ω_ρ)

הוכחה- צריך לבדוק 2 תנאים-

(1) $\bigcup_{v\in\mathcal{B}} v = X$ זה ברור כי כל כדור עם מרכז a מכיל את a, וברור שלכל $r>0$ $a\in B_r(a)$.

(2) יהיו $v_1,v_2\in\mathcal{B}$ צריכים להוכיח ש- $v_1\cap v_2=\bigcup_{\substack{w\in\mathcal{B}\\ w\subset v_1\cap v_2}} w$, כלומר להוכיח

שלכל $x\in v_1\cap v_2$ קיים $w\in\mathcal{B}$ כך ש- $w\subset v_1\cap v_2$ ו- $x\in w$.



אז יש לנו $x\in B_{r_1}(a_1)\cap B_{r_2}(a_2)$, אפשר לקחת כדור סביב x ורדיוס מספיק קטן כך שהכדור יהיה מוכל בחיתוך של שני הכדורים.

$x\in B_{r_1}(a_1) \Rightarrow \rho(x_1,a_1)<r_1$, $x\in B_{r_2}(a_2) \Rightarrow \rho(x_2,a)<r_2 \Rightarrow$

אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $\rho(x_1,a_1)+\varepsilon<r_1$ ו- $\rho(x_2,a_2)+\varepsilon<r_2$. ונוכיח ש- $B_\varepsilon(x)\subset B_{r_1}(a_1)\cap B_{r_2}(a_2)$ $(=w)$ ונסיים. יהי $z\in B_\varepsilon(x)$ ונבדוק ש- $z\in B_{r_1}(a_1)$. $z\in B_\varepsilon(x)$ אומר $\rho(z,x)<\varepsilon$. כעת, מאי-שוויון משולש $\rho(z,a_1)\le\rho(z,x)+\rho(x,a_1)<\varepsilon+\rho(x,a_1)<r_1$
וכך $z\in B_{r_1}(a_1)$ ובדיוק באותו אופן מראים $z\in B_{r_2}(a_2)$.

הגדרה- יהיו (X,ρ_1), (X,ρ_2) שני מרחבים מטריים. ρ_1 שקולה ל-ρ_2 $(\rho_1\sim\rho_2)$ אם הם יוצרות את אותה טופולוגיה.

למשל, $\rho_p\sim\rho_2$ לכל $1\le p\le\infty$. ρ_p יוצרת טופולוגיה Ω_p, ויש לנו בסיס של כדורים, יש מטריקה, מטריקה יוצרת בסיס- $\mathcal{B}$ הכדורים של מטריקה זו ובסיס יוצר טופולוגיה.

ואנחנו רוצים להראות ש- $\Omega_2 = \Omega_\rho$. למעשה צריך לבדוק ש- $\Omega_2 \subset \Omega_\rho$
ו- $\Omega_\rho \subset \Omega_2$. ומספיק לבדוק שאפשר להשוות משני הבסיסים. ראשית נראה למה.

טענה - (X,ρ_1) , (X,ρ_2) $c>0$ כך שלכל x,y מתקיים $\rho_1(x,y)\le c\rho_2(x,y)$
אז $\Omega_{\rho_1} \subset \Omega_{\rho_2}$

הוכחה - צ"ל $U\in\mathcal{B}_{\rho_1}$ ולכל $x\in U$ קיים $V\in\mathcal{B}_{\rho_2}$ כך ש- $V\subset U$ ו- $x\in V$.
ניקח $a\in X$ ו- $r>0$ ו- $U=B_r(a)$. $x\in U$ כלומר ש- $\rho_1(x,a)<r$.
ואז קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $\rho_1(x,a)+\varepsilon<r$. ואז, לכל $y\in X$ כך ש-
$\rho_1(x,y)<\varepsilon$ מתקיים $\rho_1(y,a)\le\rho_1(y,x)+\rho_1(x,a)<r$, כלומר,
$z\in B^{\rho_2}_{\frac{\varepsilon}{c}}(x)$, $\Rightarrow \rho_2(z,x)<\frac{\varepsilon}{c}$ $\Rightarrow \rho_1(x,z)\le c\rho_2(x,z)<c\cdot\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$ $\Rightarrow$
$z\in B^{\rho_1}_r(a)$. ולכן $x\in \underbrace{B^{\rho_2}_{\frac{c}{\varepsilon}}(x)}_{V} \subset \underbrace{B^{\rho_1}_r(a)}_{U}$.

הערה - אוסף כדורים סגורים בהגדרה של בסיס $\mathcal{B}=\{B_r(a)\mid r\ge 0, a\in X\}$
זהו בסיס של טופולוגיה, של הטופולוגיה הדיסקרטית. כאשר $r=0$ מקבלים נק'
ונק' זוהי קבוצה פתוחה.