משפט - קריטריון מספיק ל- S_2

יהיו X,Y מ"ט בעלי S_2
וכן X קומפקטי מקומית ובעל T_3,
אזי $C(X,Y)$ מקיים S_2.

הוכחה - (1) לכל נקודה $x\in X$ וסביבה $x\in U$ קיימת תת סביבה $x\in V\subset U$
כך ש- $cl(V)\subset U$ (נעבע מ- T_3)

(2) נבנה בסיס בן-מנייה $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ לטופולוגיה ב- X]
ובסיס בן מנייה $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$ לטופולוגיה ב- Y] קיים מ- S_2

לכל $x\in X$ ולכל סביבה $x\in U\subset X$ קיימת $x\in\sigma_{n(x,u)}$,
ומתקיים ש- $cl(\sigma_{n(x,u)})\subset U$. בנוסף, $cl(\sigma_n(x,u))$ קומפקטי.

הסבר - לפי (1) קיימת סביבה $x\in V\subset U$, וכן קיימת $x\in V'$ כך ש- $cl(V')$ קומפקטית.
נקח $x\in V\cap V'$,
אז $cl(V\cap V')\subset cl(V)\subset U$, וגם $cl(V\cap V')\subset cl(V')$ ולכן קומפקטי.
קיימת σ_{n_0} כך ש- $x\in\sigma_{n_0}\subset V\cap V'$.
σ_{n_0} מקיימת את הדרוש. לכן נסמן $n_0=n(x,u)$.

נשים לב - האוסף $\Sigma'=\{\sigma_{n(x,u)}\}$ בן מנייה. נסמן $\Sigma'=\{\sigma'_m\}_{m=1}^{\infty}$

נוכיח כי $\{U(cl(\sigma'_1)\dots cl(\sigma'_m);\tau_1\dots\tau_m)\}$
הינו בסיס לטופולוגיה ב- $C(X,Y)$

נבחר $f\in U(\underset{\text{קומפקטית}}{C},\underset{\text{פתוחה}}{W})$. נבנה קבוצה מסוג כזה כך ש- $f\in(?)\subset U(C,W)$
וזה יוכיח את הדרוש.

$$\underset{\text{קומפקטית}}{f(C)}\subset W=\bigcup_{\alpha\in A}\tau_\alpha$$

אז קיים תת כיסוי סופי: $f(C)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\tau_i\subset W$

נפעיל את f^{-1} ונקבל $C\subset\bigcup_{i=1}^{n}\underbrace{f^{-1}(\tau_i)}_{\text{פתוחות}}$

לכן ניתן לכתוב $C\subset\bigcup_{\substack{x\in C\\ i=1,2,\dots\\ x\in f^{-1}(\tau_i)}}\sigma_{n(x,f^{-1}(\tau_i))}\subset\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(\tau_i)$

קיים תת כיסוי סופי $C\subset\bigcup_{k=1}^{m}\sigma_{n(x_k,f^{-1}(\tau_{i_k}))}$

אז $f\in U(\underset{k=1\dots m}{cl(\sigma_{n(x_k,f^{-1}(\tau_{i_k}))})},\underset{k=1\dots m}{\tau_{i_k}})\subset U(C,W)$

למה? כי מהבנייה - $cl(\sigma_n(x_k,f^{-1}(\tau_{i_k})))\subset f^{-1}(\tau_{i_k})$
ולכן בהפעלת f - $f(cl(\sigma_n(x_k,f^{-1}(\tau_{i_k}))))\subset\tau_{i_k}$

$\square$

קומפקטיות במרחבי העתקות

הגדרה - יהיו X, Y מרחבים מטריים
העתקה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה במידה שווה**
אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל שתי נקודות $x_1, x_2 \in X$, $\rho_X(x_1,x_2)<\delta$
מתקיים $\rho_Y(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$

דוגמאות - $f(x)=ax+b$, $f(x)=\sin x$ } רציפות במ"ש

- $f(x)=e^x$ - לא רציפה במ"ש על $\mathbb{R}$

משפט - יהיו X, Y מטריים, X קומפקטי.
אזי כל העתקה $f\in C(X,Y)$ היא רציפה במ"ש.

הוכחה - יהי $\varepsilon>0$. נסמן $Y=\bigcup_{y\in Y} B_y(\varepsilon)$

אז $X=\bigcup_{y\in Y} \underbrace{f^{-1}(B_y(\varepsilon))}_{\text{פתוחות}}$

לפי למת לבג, קיים $\delta>0$ כך שלכל $B_x(\delta)\subset f^{-1}(B_y(\varepsilon))$
עבור y כלשהו.

לכל $x_1,x_2\in X$, $\rho_X(x_1,x_2)<\delta$, $x_2\in B_{x_1}(\delta)\subset f^{-1}(B_y(\frac{\varepsilon}{2}))$

$f(x_1), f(x_2)\in B_y(\frac{\varepsilon}{2})$

אז $\rho_Y(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$

משפט - יהי X מרחב קומפקטי, Y מרחב מטרי שלם.
אזי $C(X,Y)$ מרחב שלם.

הוכחה - תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לכל נקודה $x\in X$ הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ היא גם סדרת קושי ב-Y, אזי:
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$

נבדוק ש-f_0 העתקה רציפה.
כלומר, רציפה בכל נקודה:
נקח $x_0\in X$, $f_0(x_0)\in Y$.
לכל $\varepsilon>0$ יש למצוא סביבה $x_0\in U_{x_0}$ כך ש- $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ לכל $x_0\in X$.
קיים N_1 כך ש- $\rho(f_n(x_0),f_0(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}$
קיים N_2 כך ש- $\rho(f_n(x'),f_m(x'))<\frac{\varepsilon}{3}$ לכל $x'\in X$, $m,n\ge N_2$

נסמן $N=\max\{N_1,N_2\}$

קיימת סביבה $x_0\in U_{x_0}$ כך ש- $\rho(f_N(x'),f_N(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}$
לכל $x'\in U_{x_0}$

אז לכל $x'\in U_{x_0}$: $\rho(f_0(x'),f_0(x_0))\le$

$$\le \rho(f_0(x'),f_N(x'))+\underbrace{\rho(f_N(x'),f_N(x_0))}_{<\varepsilon/3}+\underbrace{\rho(f_N(x_0),f_0(x_0))}_{<\varepsilon/3}<\varepsilon$$

$$\rho(f_0(x'),f_N(x_0))=\lim_{m\to\infty}\rho(f_m(x'),f_N(x'))\le\frac{\varepsilon}{3}$$

דוגמה - $C([0,1],[0,1])$ אינו קומפקטי:

נקח סדרת פונקציות $f_n(x)=x^n$

מחדו"א.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases}0 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

אז $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה f לא רציפה, $f\notin C([0,1],[0,1])$

הגדרה - יהי Y מרחב מטרי, X מ"ט כלשהו.

תהי $\mathcal{F}\subset C(X,Y)$ קבוצת העתקות <u>הרציפות באותה מידה</u>

אם לכל $\varepsilon>0$, לכל $x\in X$,

קיימת סביבה $x\in U_x$ כך ש- $\rho(f(x'),f(x))<\varepsilon$

לכל $x'\in U_x$ ולכל $f\in\mathcal{F}$

משפט Arzela-Ascoli -

יהי X מרחב קומפקטי, $Y=\mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}\subset C(X,\mathbb{R}^n)$. אזי:

אז:

$cl(\mathcal{F})\subset C(X,\mathbb{R}^n)$ קומפקטי $\longleftrightarrow$ א- $\mathcal{F}$ קבוצת פונ' רציפות באותה מידה

ב- לכל $x\in X$, $\{f(x)\mid f\in\mathcal{F}\}\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה

דוגמה - $C([0,1],\mathbb{R})$

$\mathcal{F}\subset C([0,1],\mathbb{R})=\{$ א- $|f(x)|<M_1$ לכל $x\in[0,1]$, $f\in\mathcal{F}$, $f\in\mathcal{F}$

ב- כל $f\in\mathcal{F}$ גזירה וגם $|f'(x)|<M_2$ לכל $x\in[0,1]$, $f\in\mathcal{F}$ $\}$

אזי $\mathcal{F}$ פרי-קומפקטית ($cl(\mathcal{F})$ קומפקטית)

הוכחת המשפט -

$\Leftarrow$ נקח נקודה $x\in X$, ונסתכל על העתקה האבלואציה שהיא מוגדרת:

$C(X,\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$, $f\mapsto f(x)$

זו העתקה רציפה.

אזי: $\underbrace{f\in cl(\mathcal{F})}_{\text{קומפקטית}}\to\underbrace{\{f(x)\mid f\in cl(\mathcal{F})\}}_{\text{קומפקטית}}$

ב- $\mathbb{R}^n$, לכן חסומה

אז תנאי ב' מתקיים.

נבדוק את א: יהי $\varepsilon>0$, $x\in X$, מחפשים את U_x

קיים כיסוי סופי $cl(\mathcal{F})\subset\bigcup_{i=1}^{m}B_{f_i}(\varepsilon/3)$, $f_1,\dots,f_m\in\mathcal{F}$

לכל $i=1\dots m$, $X=\bigcup_{x\in X}f_i^{-1}(B_{f_i(x)}(\varepsilon/3))$

X קומפקטי, לכן $X=\bigcup_{j=1}^{m_i}f_i^{-1}(B_{f_i(x_{i,j})}(\varepsilon/3))$

נגדיר את: $U_x=\bigcap_{i=1}^{m}f_i^{-1}(B_{x_{i,j_i}}(\varepsilon/3))$

כאשר $x\in f_i^{-1}(B_{f_i(x_{i,j_i})}(\varepsilon/3))$

לכל $g\in\mathcal{F}$ ולכל $x'\in U_x$: $|g(x')-g(x)|\le$

$\le|g(x')-f_i(x')|+|f_i(x')-f_i(x)|+|f_i(x)-g(x)|<\varepsilon$

המשך הוכחה:

$\Rightarrow$ השאלה: אם $cl(\mathcal{F})$ שלם והוא ε-רשת סופית לכל $\varepsilon>0$, שלמות נובעת "ממשפט השלמות".

הערה - התנאים א', ב' מתקיימים עבור $cl(\mathcal{F})$ (תרגיל)

(1) נוכיח ש- $cl(\mathcal{F})$ חסומה.

לכל $x\in X$ נקח סביבה $x\in U_x$ כך ש- $\rho(f(x'),f(x))<1$ לכל $f\in cl(\mathcal{F})$

אז $X=\bigcup_{x\in X} U_x$ $\xrightarrow{\text{קיים}}$ $X=\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$

מתקיים $\sup_{i=1\dots m} |g(x_i)|<M$, $g\in cl(\mathcal{F})$

$$\sup_{\substack{x\in X\\ g\in cl(\mathcal{F})}} |g(x)|<M+1$$

כלומר,

$$\Big(\bigcup_{\substack{x\in X\\ g\in cl(\mathcal{F})}} \{g(x)\}\Big)\subset \underbrace{\overline{B_0(M+1)}=Y}_{\text{קומפקטי}}$$

(2) נקח $\varepsilon>0$ ונבנה ε-רשת סופית.

לכל $x\in X$ קיימת $x\in U_x$ כך ש- $|g(x')-g(x)|<\varepsilon/4$, $x'\in U_x$, $g\in cl(\mathcal{F})$

קיים $X=\bigcup_{i=1}^{K} U_{x_i}$ וכן קיים $Y=\bigcup_{j=1}^{m} B_{y_j}(\varepsilon/4)$

וכן קיים $Y=\bigcup_{j=1}^{m} B_{y_j}(3/4)$

נגדיר תת קבוצה

$$\underbrace{J}_{\text{סופית}}=\left\{\alpha:\{1\dots K\}\to\{1\dots m\} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{כך שקיימת } g\in cl(\mathcal{F})\\ g(x_i)\in B_{y_{\alpha(i)}}(\tfrac{\varepsilon}{4})\end{array}\right\}$$

לכל $\alpha\in J$: נקח $\underbrace{g\in cl(\mathcal{F})}_{\text{אוסף סופי}}$ כך ש- $\alpha=\alpha_g$

ה- g האלה הן מרכזי הכדורים ב- ε-רשת סופית

נשאר להוכיח שכל $f\in cl(\mathcal{F})$ נמצא ב- $B_{g_\alpha}(\varepsilon)$ מסוים.

לכל $x\in X$, $x\in U_{x_i}$, קיימת $\alpha_f\in J$

$f(x_i)\in B_{y_j}(\varepsilon/4)$, $j=\alpha_f(i)$

נראה כי $f\in B_{g_{\alpha_f}}(\varepsilon)$:

$$|f(x)-g_{\alpha_f}(x)|\le\left\{\begin{array}{l}|f(x)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{4}\\ +|f(x_i)-g_{\alpha_f}(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}\\ +|g_{\alpha_f}(x_i)-g_{\alpha_f}(x)|<\frac{\varepsilon}{4}\end{array}\right.<\varepsilon$$

$\square$