הערה - משתנה כל סמסטר, אבל לרוב מי שמגיש תרגילי בית מקבל בונוס לציון.

מרחבי מנה - המשך

תזכורת - אם $X = \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha$ אז $X/\Sigma = \{[A_\alpha]\}$ טופולוגיה
$\Sigma = \{A_\alpha \mid \alpha\in A\}$

שמוגדרת ע"י - $p: X \to X/\Sigma$ העתקה רציפה

הגדרנו גם A שלמה אם A איחוד של קטעים שלמים.

הגדרה - X מ"ט, X/Σ מרחב מנה.

$\Gamma \subset \Omega(X)$ נקראת בסיס קבוצות פתוחות שלמות אם:
טופולוגיה ב-X

1) $\mathcal{U} \in \Gamma$ שלמות
2) כל קבוצה פתוחה שלמה היא איחוד קבוצות מ-Γ

משפט - 1) X/Σ מקיים T_1 $\longleftrightarrow$ כל A_α סגור ב-X
2) X/Σ מקיים T_2 $\longleftrightarrow$ לכל $A_\alpha \neq A_\beta$ קיימות סביבות שלמות זרות
3) X/Σ מקיים S_2 $\longleftrightarrow$ קיים בסיס קבוצות שלמות פתוחות בן מניה

הוכחה - תרגיל

הגדרה - תהי $f: X \to Y$ העתקה רציפה. $\Sigma_f = \{f^{-1}(y) \mid y\in Y\}$
X/Σ_f מרחב מנה.

משפט - קיימת העתקה $g: X/\Sigma_f \to Y$ כך ש-
- g רציפה
- g חח"ע
- $f = g\circ p$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Y \\ & X/\Sigma_f \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

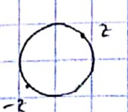
הוכחה - מגדירים את g: $g([f^{-1}(y)]) = y$
$f = g\circ p$ מתקיים
g חח"ע - קל.

רציפות - נקח קבוצה פתוחה $V \subset Y$
נבדוק האם $g^{-1}(V) \subset X/\Sigma_f$ פתוחה?

$f^{-1}(V) = p^{-1}g^{-1}(V) \subset X$ - פתוחה מרציפות f.

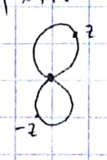
משפט - תהי $f: X \to Y$ רציפה ועל.
בנוסף, X קומפקטי ו-Y hausdorff
אז: $g: X/\Sigma_f \to Y$ הומיאומורפיזם

דוגמה - $X = S^1$ מעגל. $\Sigma = \{(z,-z) \mid z\in S^1\}$



גיאומטרית: צריך "להדביק" כל זוג נקודות כאלה.

נבחר 2 נקודות ונדביק אותם:



ונבחר עוד 2 ונדביק:

(כי "קיפלנו" את שני המעגלים יחד).

איך נראה פורמלית? בעמוד הבא.

דוגמה - $X=S^1$, $\Sigma=\{(z,-z) \mid z\in S_1\}$

נקח: $f: S^1 \xrightarrow{z^2} S^1$ (הכוונה ל-z^2 מעל המרוכבים)

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "z^2"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \\ S^1/\Sigma \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ומהמשפט, g הומיאומורפיזם

דוגמה - $X=\overline{D^2}$ עיגול סגור.

נקח $\Sigma=\{\underbrace{\partial\overline{D^2}}_{S^1}, \{x\}, x\in D^2\}$

נראה ש- $X/\Sigma=S^2$

נבנה העתקה $S^1\to S^2$. f_1 תהיה העלה ~~...~~ מעיגול ב-$\mathbb{R}^2$ ~~...~~ לחצי ספרה הנחה עליה ב-$\mathbb{R}^3$.

f_1 הומיאומורפיזם

f_1

מ-S לכיפה המתאימה

נגדיר f_2 מהכיפה לספרה.

~~...~~

לכל נקודה בכיפה, נעביר אנך לציר z, ונקח את נקודת החיתוך עם הכיפה

(כל הנקודות בבסיס הכיפה הולכות לנק' יחידה בקוטב)

אז $f=f_1\circ f_2$ על ורציפה, S^1 קומפקטי ו- S^2 hausdorff.

ומהמשפט $X/\Sigma=S^2$.

משפט - יהי X,Y מרחבים טופולוגיים.

אז f רציפה $\longleftrightarrow$ g רציפה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ X/\Sigma_f \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

(כאשר g ההעתקה מקודם: $g([f^{-1}(y)])=y$)

הוכחה: $\Rightarrow$ g רציפה אזי $f=p\circ g$ רציפה כהרכבה של רציפות

$\Leftarrow$ מהמשפט הקודם.

מרחבי העתקות

הגדרה - יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. $C(X,Y)$ קבוצת ההעתקות רציפות $f:X\to Y$

נסמן ב- $\mathcal{U}(C_1 \dots C_m; W_1 \dots W_m) \subset C(X,Y)$

$$\{f:X\to Y \mid f(C_i)\subset W_i \ , \ \underset{\text{קומפקטית}}{C_i\subset X} \ , \ \underset{\text{פתוחה}}{W_i\subset Y} \ , \ i=1\dots m\}$$

משפט - $\{\mathcal{U}(C_1\dots C_m; W_1 \dots W_m)\}$ - בסיס לטופולוגיה שנקראית קומפקטית-פתוחה ב- $C(X,Y)$
נסמנה Ω_{co}

הוכחה - א - כיסוי של כל ה- $C(X,Y)$

ב- חיתוך של 2 קבוצות מהבסיס פתוח

א- נקח $x_0\in X$, $\mathcal{U}(x_0;Y)=C(X,Y)$

ב- $\mathcal{U}(C_1,\dots,C_m;W_1\dots W_m)\cap \mathcal{U}(C_1'\dots C_n';W_1'\dots W_n') =$

$$= \mathcal{U}(C_1\dots C_m, C_1'\dots C_n'; W_1 \dots W_m, W_1'\dots W_n')$$

משפט - יהי X מ"ט קומפקטי, Y מטרי (עם מטריקה ρ)

נגדיר ב- $C(X,Y)$ מטריקה r:

$(f,g: X\to Y)$ $\quad r(f,g)=\max_{x\in X}\rho(f(x),g(x))$

טענה - $\Omega_r=\Omega_{co}$

הוכחה - נ"ל: $\mathcal{U}_1$ פתוחה ב- Ω_{co} , ו- $f\in\mathcal{U}$ ← קיימת $\mathcal{U}_2$ פתוחה ב- Ω_r
כך ש- $f\in \mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}_1$

ואותו דבר בכיוון השני.

אם נוכיח את שני הדברים האלה, נקבל את הנדרש ← תרגיל.

נקח $f\in\mathcal{U}(C_1\dots C_m;W_1\dots W_m)\in\mathcal{U}_{co}$

$f(C_i)\subset W_i$ ← קיים $\quad 0<\varepsilon_i=\min_{x\in f_i}\rho(x,Y\setminus W_i)$ ← צריך להיות כאן קצת ולהשתמש עם ניסוח ברווח
$i=1\dots m$

מגדירים $\varepsilon=\min_{i=1\dots m}\varepsilon_i$

טענה - $D_{\varepsilon/2}(f)\subset\mathcal{U}(\vec{C},\vec{W})$

נקח $g\in D_f(\frac{\varepsilon}{2})\subset X$

לכל $x\in C_i$:

$$g(x)\in D_{f(x)}(\tfrac{\varepsilon}{2})\underset{\subset W_i}{\subset} Y$$

ואז $\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\le\varepsilon_i$

בדיקה שניה: $f\in D_f(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$

נקח כיסוי פתוח:

$X=\bigcup_{x\in X}f^{-1}(D_{f(x)}(\frac{\varepsilon}{3}))$. מקומפקטיות קיים תת כיסוי סופי:
$X=\bigcup_{i=1}^{m}f^{-1}(D_{f(x_i)}(\frac{\varepsilon}{3}))$

נגדיר $C_i=f^{-1}(cl(D_{f(x_i)}(\frac{\varepsilon}{3})))$ סגורה במרחב קומפקטי ← קומפקטית

$W_i=D_{f(x_i)}(\frac{2\varepsilon}{3})$ $\quad (i=1\dots m)$.

$f\in\mathcal{U}(C_1\dots C_m;W_1\dots W_n)\overset{?}{\subset} D_f(\varepsilon)$, נוכיח את ? בעמוד הבא.

המשך הוכחה:

$$g \in U(C_1,\dots C_n; \omega_1 \dots \omega_n)$$
$$\Downarrow$$
$$g \in D_f(\varepsilon)$$

לכל $x \in X$, האם $\rho(g(x),f(x)) < \varepsilon$?

$x \in C_i$, i כלשהו, אזי $\rho(f(x),f(x_i)) \le \frac{\varepsilon}{3}$ ← מהגדרת C_i

אזי $\rho(g(x),f(x_i)) < \frac{2\varepsilon}{3}$ מהתנאי $g \in U(\vec{C},\vec{\omega})$

ולכן מש״ל $\rho(g(x),f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$