אקסיומות הפרדה

תזכורת משיעור קודם: $T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow T_2 \Leftarrow \underbrace{T_3 + T_1}_{\text{רגולריות}} \Leftarrow \underbrace{T_4 + T_1}_{\text{נורמליות}}$

דוגמא חשובה:
מרחב מטרי תמיד נורמלי.

הגדרה - הפרדה פונקציונלית

1 - מ"ט X מקיים F_3 אם לכל נקודה $x \in X$ וקבוצה סגורה $x \notin A \subset X$
קיימת פונקציה רציפה:
$$f: X \to \mathbb{R}$$
כך ש- $f(x) = 0$, $f|_A \equiv 1$

הערה - $x \in f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$, $A \subset f^{-1}(\frac{1}{2}, \infty)$

2 - מ"ט X מקיים את F_4 אם לכל שתי קבוצות סגורות זרות $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ קיימת פונקציה רציפה:
$$F: X \to \mathbb{R}$$
כך ש- $F|_A \equiv 0$, $F|_B \equiv 1$

משפט Urysohn - $F_4 \longleftrightarrow T_4$

טבעי בהגדרה בשוויל בגלל מבחן (הוכחה)

הוכחה - $\Leftarrow$ לוקחים סביבות $A \subset f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$, $B \subset f^{-1}(\frac{1}{2}, \infty)$ וסיימנו.

$\Rightarrow$ נניח ש- T_4 מתקיימת.
נקח $A, B \subset X$ סגורות זרות ונבנה פונקציה רציפה $f: X \to [0,1]$
כך ש- $F|_A \equiv 0$, $F|_B \equiv 1$

נגדיר סדרה של סביבות פתוחות של A $\{U_r\}$ לכל $r \in [0,1]$, $r = \frac{m}{2^k}$
כך שלכל $r < r'$:
$$cl(U_r) \subset U_{r'}$$

א - $U_1 = X \setminus B$

ב - בונים את U_0: לפי T_4 קיימות סביבות זרות פתוחות $A \subset U_0$, $B \subset V_0$
סגור $\subset$
מתקיים - $cl(U_0) \subset X \setminus V_0 \subset X \setminus B = U_1$

ג - בנייה אינדוקטיבית - בהינתן U_{r_1}, U_{r_2} כך ש- $r_1 < r_2$ ו- $cl(U_{r_1}) \subseteq U_{r_2}$
נבנה את $U_{\frac{r_1+r_2}{2}}$

נסמן $A_{r_1} = cl(U_{r_1})$, $B_{r_2} = X \setminus U_{r_2}$. אלו קבוצות סגורות וזרות.

לפי T_4 קיימות סביבות פתוחות וזרות $A_{r_1} \subset U'$, $B_{r_2} \subset V'$
נגדיר:
$$U_{\frac{r_1+r_2}{2}} = U'$$

דרישה - $cl(U_{\frac{r_1+r_2}{2}}) \subset U_{r_2}$, $cl(U_{r_1}) \subset U_{\frac{r_1+r_2}{2}}$

בדיקה: תרגיל. (לפי הגדרה)

המשך הוכחה: הונם את f.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ \inf\{r : x\in U_r\} & o.w.\end{cases}$$

נוכיח כי f רציפה ומקיימת $f|_A=0$, $f|_B=1$
$A\subset U_0$; נתון

רציפות: מספיק לבדוק כי כל קבוצה $f^{-1}([0,\alpha))$, $f^{-1}((\alpha,1])$ פתוחה ב-X.
(קבוצות אלו הם פרי-בסיס לטופולוגיה בקטע).

נראה ש- $f^{-1}([0,\alpha)) = \bigcup_{r<\alpha} U_r$:

$x\in f^{-1}([0,\alpha)) \Rightarrow f(x)<\alpha \Rightarrow$ קיים r כך ש- $f(x)<r<\alpha$
$\Rightarrow x\in U_r$ (מהגדרת f)

$r<\alpha$, $x\in U_r \Rightarrow f(x)\le r<\alpha \Rightarrow x\in f^{-1}([0,\alpha))$
מהגדרת f

נסתכל על $f^{-1}((\alpha,1]) = X\setminus\bigcap_{r>\alpha} cl(U_r)$

נקח $x\in f^{-1}((\alpha,1]) \Rightarrow f(x)>\alpha \Rightarrow f(x)>r'>r>\alpha$
$\Rightarrow x\notin U_{r'} \Rightarrow x\notin cl(U_r) \Rightarrow x\in X\setminus\bigcap_{r>\alpha} cl(U_r)$

$x\in X\setminus\bigcap_{r>\alpha} cl(U_r) \Rightarrow x\in\bigcup_{r>\alpha}(X\setminus cl(U_r)) \Rightarrow$ יש $r_0>\alpha$ כך ש- $x\in X\setminus cl(U_{r_0})$
$\Rightarrow f(x)\ge r_0>\alpha \Rightarrow x\in f^{-1}((\alpha,1])$.

$\square$

משפט Tietze - יהי X מ"ט המקיים את T_4.
1) $A\subset X$ תת קבוצה סגורה ו- $f:A\to[a,b]$ רציפה.
אזי קיימת הרחבה $F:X\to[a,b]$ רציפה כך ש- $F|_A=f$
2) אם $f:A\to\mathbb{R}$ אז קיימת $F:X\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש- $F|_A=f$

הוכחה: (משפט U + טריק נוסף)
א- ניתן להניח ש- $[a,b]=[-1,1]$
נסתכל על הקבוצות $A_1=f^{-1}([-1,-\frac{1}{3}])$, $B_1=f^{-1}([\frac{1}{3},1])$
סגורות ב-A וזרות (וגם ב-X)

לפי משפט U. קיימת פונקציה $g_1:X\to[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, $g_1|_{B_1}=\frac{1}{3}$, $g_1|_{A_1}=-\frac{1}{3}$
נשים לב כי:
1- $|f(x)-g_1(x)|\le\frac{2}{3}$ לכל $x\in A$
2- $|g_1(x)|\le\frac{1}{3}$ לכל $x\in X$

נגדיר $f_1:A\to[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$, $f_1(x)=f(x)-g_1(x)$

נעשה אותו: $A_2=f_1^{-1}([\frac{2}{3},\frac{2}{3^2}])$, $B_2=f_1^{-1}([\frac{2}{3^2},\frac{2}{3}])$

ממשפט U. נקבל $g_2:X\to[-\frac{2}{3^2},\frac{2}{3^2}]$, $g_2|_{A_2}=-\frac{2}{3^2}$, $g_2|_{B_2}=\frac{2}{3^2}$
כאשר:
1- $|f(x)-g_2(x)|\le(\frac{2}{3})^2$ לכל $x\in A$
2- $|g_1(x)|\le\frac{2}{3^2}$ לכל $x\in X$

המשך הוכחה - ממשיכים כך: f, $f_1=f-g_1$, $f_2=f_1-g_2$ ...
לכל n מתקיים:
1 - $|f_n(x)-g_{n+1}(x)| \le (\frac{2}{3})^{n+1}$, $x\in A$.
2 - $|g_{n+1}(x)| \le \frac{2^n}{3^{n+1}}$, $x \in X$
א - $g_1, g_2, \dots$ רציפות. הטור מתכנס במידה שווה לכן F רציפה.
(מ - M-בוחן של ויירשטראס בחדו"א 2)
ב - $|F(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1$
ג - אם $x\in A$ אז $F(x)=f(x)$

$f(x)-g_1(x)-\dots-g_n(x) = f_n(x)$

$|f_n(x)-\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)| \le |f_n(x)-g_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+2}^{\infty} |g_k(x)| \dots \xrightarrow{n\to\infty} 0$
תרגיל למה זה שווה ל- 0.

אקסיומות המנייה

הגדרה - מ"ט X מקיים את S_2 אם קיים בסיס לטופולוגיה בן מנייה.

דוגמה - $\mathbb{R}^n$ מקיים את S_2: $B=\{D_r(x) \mid r\in\mathbb{Q}, r>0, x\in\mathbb{Q}^n\}$

הגדרה - יהי X מ"ט, $x\in X$.
אוסף סביבות פתוחות של x $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ נקרא בסיס סביבות אם לכל סביבה $x\in U\subseteq X$ קיימת $x\in U_\alpha\subset U$.

מ"ט X מקיים את S_1 אם לכל נקודה $x\in X$ קיים בסיס סביבות בן מנייה.

דוגמה - כל מרחב מטרי מקיים את S_1.
בסיס סביבות: $B=\{D_x(r) \mid r\in\mathbb{Q}\}$

משפט - $S_2 \Rightarrow S_1$

הוכחה - יהי $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס לטופולוגיה.
נקח $x\in X$. $\{U_n : x\in U_n\}$ בסיס סביבות.

דוגמה - $S_1 \not\Rightarrow S_2$
נקח $X=\mathbb{R}$ עם טופולוגיה דיסקרטית

הגדרה - מ"ט X מקיים את Sep (מרחב ספרבילי) אם קיימת תת-קבוצה $A\subset X$ צפופה ובת מנייה.

משפט - $S_2 \Rightarrow sep$

הוכחה: $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס לטופולוגיה.
נקח נקודה $x_n\in U_n$, $A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. למה A צפופה? מניחים בשלילה ומגיעים לפי הגדרה.

דוגמאות: 1- $S_1 + Sep \Rightarrow S_2$

$\mathbb{R}_\ell$: Sep : $\mathbb{Q}$

S_1 : $[x, r_2)$, $x < r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$,

אבל S_2 לא מתקיים:

ניקח $[a, b)$, $a \notin \mathbb{Q}$. אי אפשר לקבל קבוצה זו ע"י איחוד,
לכן היא חייבת להיות בבסיס. אבל יש א כאלה.

2- $S_1 \not\Rightarrow Sep$

$\mathbb{R}$ עם טופולוגיה דיסקרטית.

3- $Sep \not\Rightarrow S_1$

$\mathbb{R}$ עם טופולוגיה קו-פינית.

$A = \mathbb{Q}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{\mathbb{R} \setminus x\}\ \forall x \neq x_0$

משפט- תהי $f: X \to Y$ רציפה ועל ו- X מקיים את Sep.
אזי Y מקיים את Sep.

הוכחה- $A \subset X$ צפופה בת מנייה.
נסתכל על $F(A) \in Y$ ... תרגיל.

הערה- זה לא נכון עבור S_1 , S_2

משפט- יהי X מרחב מטרי. אזי $S_1 \Longleftrightarrow S_2$

הוכחה- $\Leftarrow$ תהי $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ צפופה ב- X.

$\{D_{x_n}(\frac{1}{m})\}_{m \in \mathbb{N}}$ אוסף בן מנייה של קבוצות פתוחות.

נבדוק שזה בסיס. קריטריון - לכל U פתוחה ולכל $x \in U$ קיימת
קבוצה בסיסית U_0 , $x \in U_0 \subset U$.
קיים $D_x(\varepsilon) \subset U$.
קיימת $x_n \in D_x(\frac{1}{m})$. נסתכל בכדור

$$x \in D_{x_n}(\tfrac{1}{m}) \subset D_x(\varepsilon)$$

משפט- אם מט' X מקיים את S_1 או S_2 אז כל $A \subset X$ בטופולוגיה המושרית
מקיימת את S_1 או S_2 בהתאמה.

הוכחה- ברור.

הערה- לא נכון ל- Sep. דוגמאות בתרגול.

משפט - אם X מרחב מטרי ו- sep אז לכל $A\subset X$ מקיים את sep.

הוכחה - X מקיים את sep $\Leftarrow$ X מקיים את S_2

$\Downarrow$

A מקיים את sep $\Leftarrow$ A מקיים את S_2

הגדרה - **כיסוי פתוח**

X מט"ט, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ אוסף של תתי קבוצות פתוחות כך ש- $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = X$ נקרא כיסוי.

תהי $A'\subset A$.

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ נקרא תת-כיסוי אם $\bigcup_{\alpha\in A'} X_\alpha = X$

משפט Lindelöf - יהי X מט"ט בעל S_2.

אזי מכל כיסוי פתוח ניתן לבחור בתת כיסוי בן מניה.

הוכחה - יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כיסוי פתוח.

מ-S_2 יש $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס לטופולוגיה.

לכל נקודה $x\in X$, $x\in X_{\alpha_1}$ מתקיימת $x\in U_n\subset X_\alpha$. $n=n_x$, $\alpha=\alpha_n=\alpha_{n_x}$.

אז $\{X_{\alpha_{n_x}}\}$ תת כיסוי.