הרצאה 3

קשירות - המשך

מה למדנו עד עכשיו?

- מרחב הוא קשיר אם $X \neq U \cup V$ או $X \neq F \cup G$
- $A \subset X$ קשיר ← $cl(A) \subset X$ קשיר
- $f: X \to f(X)$. X קשיר ← $f(X)$ קשיר
- דוגמה - $[0,1]$ קשיר
- $X = \bigcup X_\alpha$, X_α קשירות, ו- $\bigcap X_\alpha \neq \emptyset$

רכיב קשירות

הערה - X מ"ט, $a \in X$ נקודה. אזי a קשירה.

הגדרה - יהי X מרחב טופולוגי. $a \in X$.
הקבוצה המקסימלית הקשירה $A \subset X$ הכוללת את a נקראת רכיב הקשירות של a.

משפט - לכל מ"ט X ולכל נק' $a \in X$, רכיב הקשירות של a קיים, יחיד, לא ריק, וסגור.

הוכחה - נבנה את הקבוצה K_a - איחוד התתי קבוצות הקשירות הכוללות את a.

א- $\{a\} \in K_a$, אזי K_a לא ריקה.

ב - K_a מקסימלית ביחס להכלה
ו K_a קשירה כאיחוד של קשירות ← K_a רכיב קשירות והוא יחיד

ג - נסתכל על $cl(K_a)$. הוא גם קשיר וכולל את a.
לכן $cl(K_a) = K_a$ ⇐ K_a סגור.

למה - לכל $a,b \in X$, מתקיים $K_a = K_b$ או $K_a \cap K_b = \emptyset$

הוכחה - אם $K_a \cap K_b = \emptyset$ - בסדר
אם $K_a \cap K_b \neq \emptyset$, אזי $K_a \cup K_b$ קשיר, ו- $a,b \in K_a, K_b$
אזי $K_a \subseteq K_a \cup K_b$ $\overset{\text{ממקסימליות}}{\Longrightarrow}$ $K_a = K_a \cup K_b$

ובאופן סימטרי על K_b.

מסקנה - כל מ"ט מתפרק לאיחוד זר של רכיבי הקשירות.
כל רכיב קשירות הוא רכיב הקשירות של כל נקודה בו.

מסקנה - X קשיר ⟷ יש בו רק רכיב קשירות אחד.

הגדרה - מרחב X נקרא לא קשיר לחלוטין אם כל רכיב קשירות הוא חד-נקודתי.

דוגמה - מרחב דיסקרטי (כמו $\mathbb{N}$)
- $\mathbb{Q}$

קשירות מסילתית

הגדרה - יהי X מ"ט, $I=[0,1]$

מסילה ב- X זאת העתקה רציפה $f: I \to X$

$f(0)$ - התחלה, $f(1)$ - סוף

דוגמה - מסילה קבועה:

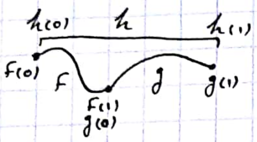
$$f:[0,1] \to X, \quad t \mapsto x_0 \quad \forall t\in[0,1].$$

הגדרה - 1) מכפלת מסילות

X מ"ט, $f: I \to X$, $g: I\to X$, $f(1)=g(0)$

נגדיר:

$$f*g = fg = h : [0,1] \to X$$

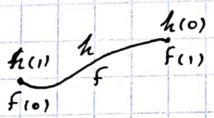


$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

h מוגדרת היטב ורציפה ולכן היא אכן מסילה.

2) מסילה נגדית/הופכית

X מ"ט, $f: I\to X$ מסילה.



$$h : [0,1] \to X$$

$$h(t) = f(1-t) = \overleftarrow{f}(t)$$

הגדרה - X מ"ט, $a,b\in X$.

$a\sim b$ אם קיימת מסילה $f: I \to X$, $f(0)=a, f(1)=b$

למה - יחס זה הוא יחס שקילות.

הוכחה:

א - $a\sim a$ (מסילה קבועה)

ב - $a\sim b \Rightarrow b\sim a$ (מסילה נגדית)

ג - $a\sim b,\ b\sim c \Rightarrow a\sim c$ (מכפלת מסילות)

הגדרה - מ"ט X נקרא **קשיר מסילתית** אם כל שתי נקודות $a,b\in X$ שקולות ע"י מסילות: קיימת מסילה $f: I\to X$, $f(0)=a$, $f(1)=b$

הערה - קשירות מסילתית נשמרת ע"י הומיאומורפיזמים.

דוגמה - דוגמה נגדית לכך ש- $A\subset X$ קשירה מסילתית $\not\Rightarrow$ $cl(A)$ קשירה מסילתית

נבנה תת קבוצה קשירה מסילתית עם סגור לא קשיר מסילתית.

$$A = \{(x,y) \mid x\in(0,1],\ y = \sin(\tfrac{1}{x})\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$cl(A) = A \cup \{(0,t) \mid t\in[-1,1]\}$$

טענה 1 - A קשירה מסילתית

טענה 2 - $cl(A)$ אינו קשיר מסילתית.

הוכחות בדף הבא.

הוכחת 1 - נמצא את A לקטע בין a ל- b, ונרמל ל- I.

הוכחת 2 - נניח שקיימת $f: I \to cl(A)$ קש"מ. $f(0)=(0,0)$, $f(1)=(1,\sin 1)$

$pr_x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ הטלה על ציר X.

נבנה סדרה יורדת $t_n \in [0,1]$ כך ש- $\underbrace{pr_x \circ f}_{\text{רציפה}}(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$

עבור $n=1$:

$$pr_x \circ f(0) = 0, \quad pr_x \circ f(1) = 1 \Rightarrow$$ קיימת $t_1 \in [0,1]$, $pr_x \circ f(t_1) = \frac{2}{3\pi}$ (משפט ויירשטרס)

עבור $n=2$: $$pr_x \circ f(0) = 0, \quad pr_x \circ f(t_1) = \frac{2}{3\pi} \Rightarrow$$ קיימת $t_2 \in [0,t_1]$, $pr_x \circ f(t_2) = \frac{2}{5\pi}$

וממשיכים...

סדרה $\{t_n\}$ יורדת וחסומה, אז קיים גבול $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$

אז קיים $\lim_{n\to\infty} f(t_n)$ (מהיינה)

לכן קיים $\lim_{n\to\infty} pr_x \circ f(t_n) = 0$

וכן קיים $\lim_{n\to\infty} pr_y \circ f(t_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$$

סתירה.

משפט - יהי $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, כל X_α קשירה מסילתית, $\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \neq \emptyset$

אז X קשור מסילתית.

הוכחה - תרגיל.

משפט - $F: X \to Y$ רציפה. X קשירה מסילתית $\Rightarrow F(X) \subset Y$ קשירה מסילתית

הוכחה - $y_0, y_1 \in F(X)$. קיימת $x_0 \in X$, $x_1 \in X$, $F(x_0) = y_0$, $F(x_1) = y_1$

X קשור מסילתית אז קיימת מסילה: $g: [0,1] \to X$, $g(0) = x_0$, $g(1) = x_1$,

אז:

$$F \circ g : [0,1] \to Y$$

$F \circ g(0) = y_0$, $F \circ g(1) = y_1$, $F \circ g$ רציפה כהרכבת רציפות.

הגדרה - יהי X מ"ט, מחלקות קשירות מסילתית ב-X נקראות רכיבי קשירות מסילתית.

למה - רכיבי קשירות מסילתית הם תת הקבוצות המקסימליות הקשורות מסילתית.

הוכחה - נובע מיידית מתכונות שהוכחנו.

משפט - אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

הוכחה - נקח $a \in X$ ולכל $x \in X$ נבנה מסילה $f_x : I \to X$, $f(0)=a$, $f(1)=x$.

אז - $$X = \bigcup_{x \in X} \underbrace{f_x[0,1]}_{\text{קשורה}}$$

(העתקה רציפה מקטע קשיר היא קשורה)

וגם $a \in \bigcap_{x \in X} f_x[0,1]$ $\Leftarrow$ אז החיתוך לא ריק.

לכן X קשיר.

דוגמה - $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \mid x \in (0,1], y = \sin \frac{1}{x}\}$

A קשורה מסילתית $\Leftarrow$ A קשורה $\Leftarrow$ $cl(A)$ קשיר

אבל $cl(A)$ אינו קשיר מסילתית.

אז -

$$\underbrace{cl(A)}_{\text{רכיב קשירות אחד}} = \underbrace{A \cup \{(0,t) \mid t \in [-1,1]\}}_{\text{2 רכיבי קשירות מסילתית}}$$

הערה - נשים לב שרכיב קשירות מסילתית אינו חייב להיות סגור.

דוגמה - $\underset{\text{מעגל}}{S_1}, \underset{\text{ספירה}}{S_2}$ - אינם הומיאומורפים.

נניח שקיים הומיאו' $F : S_1 \to S_2$ — טריק הפאנצ'ר!

נסתכל על $F' : \underbrace{S_1 \setminus \{1,-1\}}_{\text{אינו קשיר מסילתית}} \to \underbrace{S_2 \setminus \{a,b\}}_{\text{קשיר מסילתית}}$

סתירה

הגדרה - מ"ט X נקרא קשיר מסילתית מקומית אם לכל נקודה $a \in X$ קיימת סביבה $a \in U \subseteq X$ כך ש-U קשורה מסילתית.

הערה - מקומיות היא משני סוגים:
1- "קיימת סביבה בעלת התכונה" (חלש יותר)
2- "לכל סביבה קיימת תת סביבה בעלת התכונה" (חזק יותר)

הערה - קשירות מסילתית $\nRightarrow$ קשירות מסילתית מקומית.

משפט - אם X קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי X קשיר מסילתית.

הוכחה - $$X = \biguplus_{\text{רכיבי קשירות מסילתית}} L$$

כל רכיב קשירות מסילתית L הוא פתוח, כי:
$a \in L$, קיימת סביבה $a \in U \subseteq X$, U קשורה מסילתית. $U \subset L$ (תחשבו למה)
קיבלנו פירוק לקבוצות פתוחות:

$$X = \biguplus_{\text{רכיבי קשירות מסילתית}} L$$ - פירוק זר של קבוצות פתוחות.

אז מקשירות יש רק קבוצה אחת.

מסקנה - כל קבוצה פתוחה קשירה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קשירה מסילתית.

הוכחה - נראה כי $\mathcal{U}$ קשירה מסילתית מקומית.

$a \in \mathcal{U}$, $a \subset D_\alpha(a) \subset \mathcal{U}$. כדור הוא קשיר מסילתית.

אקסיומות הפרדה

הגדרה - מ"ט X מקיים את T_0 אם לכל 2 נק' שונות $a \neq b \in X$

או קיימת סביבה $a \in \mathcal{U}_a \subset X$, $b \notin \mathcal{U}_a$

או קיימת סביבה $b \in \mathcal{U}_b \subset X$, $a \notin \mathcal{U}_b$

הגדרה - מ"ט X מקיים את T_1 אם לכל 2 נק' שונות $a \neq b \in X$

קיימות סביבות $a \in \mathcal{U}_a \subset X$, $b \in \mathcal{U}_b \subset X$

כך ש- $b \notin \mathcal{U}_a$, $a \notin \mathcal{U}_b$

דוגמאות - 1) $\{a,b\}$ אנטי דיסקרטית. $\cancel{T_0}$, $\cancel{T_1}$

2) $\{a,b\}$ $\Omega = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$. T_0 , $\cancel{T_1}$

3) כל מרחב מטרי הוא בעל T_1.

4) X מרחב עם טופולוגיה קו-סופית. X מקיים את T_1.

למה - X מקיים את T_1 $\longleftrightarrow$ כל נקודה היא תת-קבוצה סגורה

הוכחה - $\Leftarrow$ משלים לנק' הוא איחוד סביבות שלא כוללות את הנק'. לכן הוא פתוח.

$\Rightarrow$ $a \neq b$, $\mathcal{U}_a = X \setminus \{b\}$, $\mathcal{U}_b = X \setminus \{a\}$

הגדרה - מרחב טופולוגי X נקרא מרחב Hausdorff (מקיים את T_2)

אם לכל 2 נק' $a \neq b \in X$ קיימות סביבות

$a \in \mathcal{U}_a \subset X$, $b \in \mathcal{U}_b \subset X$ כך ש- $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset$

דוגמה - 1) מרחב X אינסופי עם טופולוגיה קו-סופית מקיים את T_1 ולא את T_2.

2 - כל מרחב מטרי הוא Hausdorff

הגדרה - תהי $x_n \in X$ סדרת נקודות במרחב טופולוגי X.

הנקודה $x_0 \in X$ נקראת גבול של $\{x_n\}$ אם לכל סביבה $\mathcal{U}$ של x_0

קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $x_n \in \mathcal{U}$ לכל $n \geq n_0$.

למה - יהי X מרחב Hausdorff

אם לסדרה $\{x_n\} \subset X$ קיים גבול אזי הוא יחיד.

הוכחה - נניח $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, $a \neq b$

נקח $a \in \mathcal{U}_a, b \in \mathcal{U}_b$ כך ש- $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{קיים } N_1 , \ x_n \in \mathcal{U}_a \ \text{לכל } n \geq N_1 \\ \text{קיים } N_2 \ \ x_n \in \mathcal{U}_b \ \text{לכל } n \geq N_2 \end{array}\right\} \text{סתירה}$$

דוגמה - נקח $\mathbb{Z}$ עם טופולוגיה קו-סופית.

אזי הסדרה $\{n\}_{n=1,2\ldots}$ מתכנסת לכל מספר

למה - יהי X מרחב H. $A \subset X$.

אזי A גם H. בטופולוגיה המושרית.

הוכחה - $a \neq b \in A$ $\left[\begin{array}{l} \mathcal{U}_a' = A \cap \mathcal{U}_a \\ \mathcal{U}_b' = A \cap \mathcal{U}_b \end{array}\right. \Rightarrow \mathcal{U}_a' \cap \mathcal{U}_b' = \emptyset$

הגדרה - מ"ט X מקיים את T_3 אם לכל נקודה $a\in X$
ולכל תת הקבוצה סגורה $A\subset X$ כך ש- $a\notin A$ קיימות סביבות זרות:
$a\in U_a\subset X$, $A\subset U_a\subset X$ כך ש- $U_a\cap U_A=\emptyset$

מ"ט המקיימים T_1+T_3 נקראות רגולריות.

הערה- $T_3 \not\Leftarrow T_2$, $T_3 \not\Leftarrow T_1$, $T_1 \not\Leftarrow T_3$

דוגמה- מרחב אנטי-דיסקרטי מקיים את T_3 אבל לא את T_1

הגדרה - מ"ט X מקיים את T_4 אם לכל שתי קבוצות סגורות זרות $A\cap B=\emptyset$, $A,B\subset X$
קיימות סביבות זרות:
$A\subset U_A\subset X$
$B\subset U_B\subset X$ כך ש- $U_A\cap U_B=\emptyset$

מ"ט המקיימים T_1+T_4 נקראות נורמליות.

הערה - $3 \not\Leftarrow T_4$, $2 \not\Leftarrow$

משפט- $T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow$ Hausdorff $\Leftarrow$ רגולריות $\Leftarrow$ נורמליות

משפט- כל מרחב מטרי הוא נורמלי

הוכחה- כבר בדקנו את T_2, ולכן T_1.
ניתן להראות T_4.
$A,B\subset X$ סגורות וזרות.
א- לכל נקודה $x\notin A$ קיים $r_{x,A}>0$ כך ש- $D_{r_{x,A}}(x)\cap A=\emptyset$
ב- לכל נקודה $y\notin B$ קיים $r_{y,B}>0$ כך ש- $D_{r_{y,B}}(y)\cap B=\emptyset$
ג -

$$U_A=\bigcup_{y\in A} D_{r_{y,B}/2}(y)\supset A$$

$$U_B=\bigcup_{x\in B} D_{r_{x,A}/2}(x)\supset B$$

טענה- $U_A\cap U_B=\emptyset$
הוכחה - נניח שקיימת $z\in U_A\cap U_B$.
אז $z\in D_{r_{y,B}/2}(y)$
$z\in D_{r_{x,A}/2}(x)$

אז $\rho(x,z)<\frac{r_{x,A}}{2}$, $\rho(y,z)<\frac{r_{y,A}}{2}$

אזי $\rho(x,y)<\frac{r_{x,A}+r_{y,B}}{2}\le r_{x,A}$

אז $A\ni y\in D_{r_{x,A}}(x)$. סתירה.