5. קבוצות צפופות

הגדרה - X מ"ט, $A\subset X$.

A **צפופה** ב-X אם $cl(A)=X$

משפט - A צפופה ב-X ⟷ לכל קבוצה פתוחה $\emptyset\neq U\subset X$ מתקיים $A\cap U\neq\emptyset$

הוכחה - ⇐ נניח ש- $cl(A)=X$.
נקח $\emptyset\neq U\in X$ פתוחה.
אם $A\cap U=\emptyset$ אזי כל $x\in U$ חיצונית - $cl(A)=X\setminus$(נקודות חיצוניות)
זו סתירה. לכן $A\cap U\neq\emptyset$.
⇒ התנאי השני אומר שכל נקודה היא נקודת הצטברות.
לכן $cl(A)=X$.

דוגמה - $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^n\subset\mathbb{R}^n$ צפופות

הגדרה - X מ"ט, $A\subset X$
A **אי-צפופה לחלוטין** אם $Int(cl(A))=\emptyset$ (נקראת גם דלילה)

משפט - $A\subset X$ אי-צפופה לחלוטין ⟷ לכל $\emptyset\neq U\subset X$ פתוחה קיימת $\emptyset\neq V\subset U$ פתוחה כך ש- $A\cap V=\emptyset$

הוכחה - ⇐ $Int(cl(A))=\emptyset$. נקח $\emptyset\neq U\subset X$ פתוחה.
אזי $U\not\subset Int(cl(A))$. לכן $U\not\subset cl(A)$
לכן, נקח $\emptyset\neq V=U\setminus cl(A)$ פתוחה. נקבל $A\cap V=\emptyset$
⇒ נניח בשלילה $U=Int(cl(A))\neq\emptyset$
מתקיים $U\subset cl(A)$, לכל $V\subset U$ פתוחה, $A\cap V\neq\emptyset$
להנ"ק של U - נקודות הצטברות ← כל הנק' של V גם נק' הצטברות
ולכן מהגדרת נק' הצטברות, $A\cap V\neq\emptyset$. סתירה.

דוגמה - $\{x\}\in\mathbb{R}$, קבוצת קנטור, אי צפופות לחלוטין.

דוגמה - משפט קורטובסקי (Kuratowski) (לא יוכח, נשאר כתרגיל מתקדם)
X מ"ט. $Int(A)\subset A\subset cl(A)$. נפתח לסדרה:

$$\dots Int(cl(Int(A))),\ cl(Int(A)),\ Int(A),\ A,\ cl(A),\ Int(cl(A)),\ cl(Int(cl(A)))\dots$$

1) לכל X, $A\subset X$, מספר האיברים בסדרה זו סופית.
2) קיים X, $A\subset X$ כך שכל-7 הקבוצות הנ"ל שונות זו מזו.

6. טופולוגיה מושרית/יחסית (relative/induced)

הגדרה - יהי X מ"ט, $\Omega\subset 2^X$ טופולוגיה.
תהי $A\subset X$ תת קבוצה.
נסמן
$\Omega_A=\{A\cap U \mid U\in\Omega\}$ אז $V\in A$ פתוחה (יחסית) ⟷ $V=A\cap U$ עבור $U\in X$ פתוחה (בX)

משפט - Ω_A טופולוגיה ב-A, ונקרא את טופולוגיה מושרית.

Scanned by CamScanner

משפט - X מ"ט, $B\subset A\subset X$. אזי $\Omega_B=(\Omega_A)_B$ (טרנזיטיביות)

משפט - יהי X מרחב מטרי $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$, $A\subset X$.
נגדיר מטריקה ב-A $\rho_A: A\times A\to\mathbb{R}$
אזי -
$$\Omega_{\rho_A}=\Omega_A$$

העתקות רציפות

דוגמה - $X=Y=\mathbb{R}^2$, $f:X\to Y$
f רציפה אם לכל $x_0\in X$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$
כך שלכל נקודה $x\in D_{x_0}(\delta)$ מתקיים $f(x)\in D_{f(x_0)}(\varepsilon)$

למה - $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ רציפה $\longleftrightarrow$ מקור של כל קבוצה פתוחה $U\in\mathbb{R}^2$ פתוח
במרחב המקור $(f^{-1}(U)\subset\mathbb{R}^2)$

הגדרה - X,Y מ"ט, $f:X\to Y$.
f העתקה רציפה אם לכל $U\subset Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)\subset X$ גם פתוחה.

הגדרה - X,Y מ"ט, $f:X\to Y$, $x_0\in X$.
f העתקה רציפה בנקודה x_0 אם לכל סביבה $f(x_0)\in V\subset Y$
קיימת סביבה $x_0\in U\subset X$ כך ש- $f(U)\in V$

משפט - $f:X\to Y$ רציפה $\longleftrightarrow$ f רציפה בכל נקודה של X

הוכחה - תרגיל

משפט - $f:X\to Y$ רציפה $\longleftrightarrow$ מקור של כל קבוצה סגורה ב-Y סגור ב-X.

הגדרה - X,Y מ"ט, $f:X\to Y$ היא הומאומורפיזם אם:
1) f רציפה
2) f הפיכה
3) f^{-1} רציפה

דוגמאות - $Id: X\to X$
- $f:X\to Y$ הומ' $\leftarrow$ $f^{-1}:Y\to X$ גם הומ'
- $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$. אם g,f הומ' $\leftarrow$ $g\circ f$ גם הומ'

למה - הרכבה של העתקות רציפות היא רציפה: $\underbrace{X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z}_{g\circ f}$

הוכחה - $U\subset Z$ פתוחה.
$$(g\circ f)^{-1}(U)\subset X=\underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{פתוחה מרציפות } g})}_{\text{פתוחה מרציפות } f}$$

מסקנה - יחס הומאומורפי הוא יחס שקילות.

כעת נוכל לנסח את השאלה המרכזית בטופולוגיה - מיון מרחבים טופולוגיים עד כדי איזומורפיזם.

דוגמה - השערת Poincare

השע"ה - הוכח שיריעה תלת מימדית סגורה ופשוט קשר היא הומיאומורפית ל- $S^3 = \{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$

Perelman בנה העתקת-הומי' משוכללת, ופתר.

למה - צמצום של העתקה רציפה הוא רציף

אם $f: X \to Y$ רציף, אז לכל $A \subset X$, $f|_A : A \to Y$ רציף.

הוכחה - $U \subset Y$ פתוחה, $(f|_A)^{-1}(U) \subset A$

$$(f|_A)^{-1}(U) = \underbrace{\underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{פתוח כי } f \text{ רציפה}} \cap A}_{\text{פתוח כי חיתוך סופי של פתוחות הוא פתוח}}$$

למה - צמצום של העתקה רציפה על התמונה, גם רציף.

$f: X \to Y$ רציף $\Leftarrow$ $f: X \to f(X)$ רציף.

הוכחה - $V \subset f(X)$ פתוחה

$V = f(X) \cap U$, $U \subset Y$ פתוחה

$$f^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{פתוח כי } f \text{ רציפה}}$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוח.

הגדרה - יהי $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ כיסוי.

כיסוי נקרא כיסוי יסודי אם לכל העתקה $f: X \to Y$ מתקיים:

$f_\alpha : X_\alpha \to Y$ רציף לכל $\alpha \in A$ $\Leftarrow$ $f: X \to Y$ רציפה.

דוגמה - $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ הוא כיסוי, אך לרוב לא כיסוי יסודי

משפט - 1) כל כיסוי פתוח הוא יסודי (לכל $\alpha \in A$, X_α פתוח)

2) כל כיסוי סגור סופי הוא יסודי (לכל $\alpha \in A$, X_α סגור וסופי)

הוכחה - 2) $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, לכל i, $X_i \subset X$ סגור.

$f: X \to Y$ רציפה בהנתן ש- $f_i : X_i \to Y$ רציף לכל i.

$F \subset Y$ סגורה,

$$\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{f_i^{-1}(F)}_{\text{סגורה ב-} X_i}}_{} = f^{-1}(F)$$

סגורה כאיחוד של קבוצות סגורות.

דוגמאות - $f: [0, 2\pi) \to S^1$ (S^1 - מעגל ב- $\mathbb{R}^2$)

$f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ רציפה, חח"ע, אבל לא הומי'. (f^{-1} לא רציפה ב-0)

- $D^n \approx \mathbb{R}^n$ ← כדור פתוח

- $\overline{D^n} \approx I^n$ ← כדור סגור (קובייה)

- $\overline{D^n} \not\approx \mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$ ($m \neq n$)

בנינו ~~[illegible]~~ קטגוריה טופולוגית (Top)
בקטגוריה יש אוביקטים (מרחבים טופולוגיים) ומורפיזמים (העתקות רציפות)

קשירות

יהי X מרחב טופולוגי. X, $\emptyset$ קבוצות פתוחות וסגורות.

הגדרה - מ"ט X נקרא **קשיר** (connected) אם אין תתי-קבוצות פתוחות-סגורות פרט ל- X ו- $\emptyset$.

הגדרות שקולות -
1) X קשיר אם הוא אינו ניתן לפירוק $X=U\cup V$, U,V פתוחות, זרות, לא ריקות.
2) X קשיר אם הוא אינו ניתן לפירוק $X=F\cup G$, F,G סגורות, זרות, לא ריקות.
1') X קשיר אם לכל $X=U\cup V$, U,V זרות ופתוחות, $U=\emptyset$ או $V=\emptyset$.
2') X קשיר אם לכל $X=F\cup G$, F,G זרות וסגורות, $F=\emptyset$ או $G=\emptyset$.

הגדרה - X מ"ט, $A\subset X$.
A **תת קבוצה קשירה** אם היא קשירה בטופולוגיה מושרית.

משפט - X מ"ט, $A\subset X$. A קשירה $\leftarrow$ $Cl(A)$ קשיר

הוכחה - נניח כי $Cl(A)=F\cup G$ סגורות וזרות
$$A=\underbrace{(F\cap A)\cup(G\cap A)}_{\text{סגורות וזרות ב-}A}$$
כיוון ש- A קשירה, $F\cap A=\emptyset \Leftarrow G\supset A \Leftarrow G\supset Cl(A) \Leftarrow F=\emptyset$

משפט - יהי $X=\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$ כיסוי כך שכל X_α קשיר, $\bigcap_{\alpha\in A}X_\alpha\neq\emptyset$
אזי X קשיר.

הוכחה - $X=U\cup V=\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$, U,V פתוחות וזרות
$U=\emptyset$ או $V=\emptyset$?

$$X_\alpha=\underbrace{(X_\alpha\cap U)\cup(X_\alpha\cap V)}_{\text{פתוחות וזרות ב-}X_\alpha}$$
$X_\alpha\cap U=\emptyset$, $x_0\in X_\alpha\subset V$

$$X_\beta=\underset{\emptyset}{(X_\beta\cap U)}\cup\underset{x_0}{(X_\beta\cap V)}$$
אזי $X_\beta\subset V$

נקבל שלכל $\gamma\in A$, $X_\gamma\subset V$, ולכן $X\subset V$. אזי $U=\emptyset$

משפט - $f:X\to Y$ רציפה. אם X קשיר אז $f(X)\subset Y$ קשיר.

הוכחה - נניח ש- $f(X)=U\cup V$, U,V פתוחות וזרות.
$f:X\to f(X)$ גם רציפה.
$$X=\underbrace{f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)}_{\text{פתוחות וזרות}} \Leftarrow f^{-1}(U)=\emptyset \Leftarrow U=\emptyset$$

מסקנה - קשירות זו אינווריאנטה טופולוגית.

משפט - כל קטע $[a,b] \subset \mathbb{R}$ הוא קשיר

הוכחה - נניח $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = [a,b]$, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ פתוחות וזרות.

נגדיר $f:[a,b] \to \{1,-1\}$,

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{U} \\ -1 & x \in \mathcal{V} \end{cases}$ ← רציפה

ממשפט ויירשטראס נובע כי או $\mathcal{U} = \emptyset$ או $\mathcal{V} = \emptyset$

דוגמאות - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ קשירים

- $X = [0, 2\pi)$, $Y = S_1$. X, Y לא הומיאומורפים.

הוכחה - נניח בשלילה ש- $X \sim Y$, f ההומי'.

עכשיו טריק!

$X' = [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ ← אינו קשיר

$f: X' \to S_1 \setminus \{f(\pi)\}$ ← הומי' מטופולוגיה מושרית

קשיר ⇐ סתירה.