[illegible] שיעור 11

יריעות - תזכורת

$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$, $f_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$

T_2 , S_2

משפט - מיון של יריעות חד מימדיות קשירות:

1) S^1 ספירה
2) $\mathbb{R}$ לא קומפקטית ללא שפה
3) $[0,1]$ קומפקטית עם שפה
4) $[0,\infty)$ לא קומפקטית עם שפה

משפט Jordan -

תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ ת"ק הומיאומורפית ל-S^1

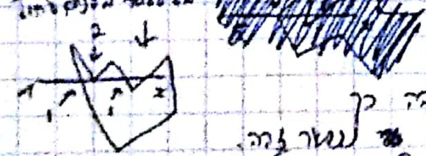
אזי: 1) $\mathbb{R}^2\setminus A$ מורכב משני רכיבי קשירות: חסום ולא חסום
2) הרכיב החסום הומיאומורפי לעיגול פתוח D^2
3) סגור הרכיב החסום הומיאומורפי לעיגול סגור $\overline{D^2}$

הוכחה: (רק חלקית, ההוכחה השלמה טכנית ומסובכת)

נניח ש-A - קו שבור בעל מספר סופי של צלעות
(נשים לב ש-A לא חותך את עצמו אחרת הוא לא הומיאומורפי ל-S^1, כי אפשר לפנצ'ר בנקודת החיתוך ולהפריד לשני רכיבי קשירות)

נקח וקטור $\vec{a}\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ שאינו מקביל לשום צלע.
נגדיר פונקציה: $\varphi : \mathbb{R}^2\setminus A \to \{0,1\}$

לכל $x\in\mathbb{R}^2\setminus A$ נקח קרן המתחילה ב-x המכוון ע"י $\vec{a}$.
סופרים מספר נקודות חיתוך של הקרן עם A (עם ריבוי: מפגש עם צלע = 1, מפגש עם ~~[illegible]~~ קודקוד בלי לעבור מצד לצד = 2)

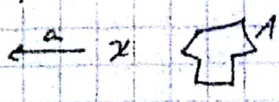


נגדיר: $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{מספר זוגי} \\ 1 & \text{מספר אי זוגי} \end{cases}$

טענה: φ רציפה: ~~[illegible]~~ לכל x יש סביבה כך שבתוך סביבה זו, מספר הנקודות בריבוי 1 נשאר זהה.
מספר הנקודות מריבוי 2 משתנה אך זה לא משפיע על הזוגיות.

טענה: $\varphi^{-1}(0)\neq\emptyset$, $\varphi^{-1}(1)\neq\emptyset$

הוכחה: $\varphi^{-1}(0)\neq\emptyset$ כי A קומפקטית ולכן חסומה, לכן אפשר לבחור x כך:



ואז $\varphi(x)=0$

$\varphi^{-1}(1)\neq\emptyset$ כי נקח נקודה $x_0\in A$ פנימית לצלע, ונבחר x_1, x_2 מספיק קרובות ל-x_0, משני צדי הצלע:

אז $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$

מסקנה - יש לפחות 2 רכיבי קשירות ~~[illegible]~~
(כי $\varphi^{-1}(0)$, $\varphi^{-1}(1)$ פתוחות ולא ריקות)

המשך הוכחת משפט ג'ורדן:

טענה - (ג)'-ע, (ו)'-ע קשירות

הוכחה: נקח ε-סביבה של A, A_ε

[שאלה: מה הדרישה על ε?
שוסטין: נניח שהוא יהיה קטן.]

ונקבל $A_\varepsilon \cong S^1\times[-\varepsilon,\varepsilon]$, $A \simeq S^1\times\{0\}$ (מתנים את הפוליגון לחלקים, כל צלע הומיאומורפית לחלק מהמעגל...)

ואז $A_\varepsilon \setminus A = S^1\times[-\varepsilon,0) \cup S^1\times(0,\varepsilon)$

נראה כי כל נקודה $x\in\mathbb{R}^2\setminus A$ ניתן לקשור עם נקודה ב- A_ε^+ או ב- A_ε^- ע"י מסילה בתוך $\mathbb{R}^2\setminus A$

תהי $x\in\mathbb{R}^2\setminus A$ נקודה כלשהי, ו- $y\in A$.

נחבר את x ו- y בישר. אז יש y' שהיא נק' המפגש הראשונה של הקטע עם A_ε.

מסקנה - (ס)'-ע, (ו)'-ע קשירים מסילתית.

את סעיפים ב, ג' של המשפט לא נוכיח פורמלית.

סקיצת ההוכחה:

- מחלקים את פנים A למשולשים (יש מספר סופי)
- יש הומיאומורפיזם בין Δ ל- D^2
- באינדוקציה: כל פעם מוסיפים Δ, ומשתמשים בזה שמה שהומיאומורפי לדיסק, הומיאומורפי לחצי דיסק.

יריעות דו-מימדיות סגורות (משטחים סגורים)

"זה נושא מורכב, אז לא נוכל להוכיח כלום". - ד. שוסטין

דוגמאות - S^2 ספירה.
- $T^2=S^1\times S^1$ טורוס.

] סגורות קומפקטיות ללא שפה

- $M^2 =$  סרט מוביוס. - סגור קומפקטי עם שפה

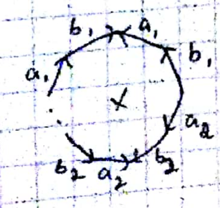
- $\partial M^2 = S^1$ - השפה היא הצלעות המסומנות — אחרי הדבקה

משפט מיון של משטחים סגורים -

1) S^2 ← גנוס
2) ספירות עם g ידיות ($g\geq 1$)
3) ספירות עם g סרטי מוביוס ($g\geq 1$)

הגדרות - 2) X מצולע עם $4g$ צלעות.

$S_g^2 = X/_S$ ← הדבקת a_i ל-a_i, וגם b_i ל-b_i לפי הכיוונים:



3) X מצולע עם $2g$ צלעות

$\tilde{S}_g^2 = X/_S$ ← בכל זוג מדביקים a_i ל-a_i לפי הכיוונים:

דוגמאות - 1) S^2_g , $g=1$  ← טורוס T^2

2) $\tilde{S}^2_g$, $g=1$  ← מישור פרויקטיבי $\mathbb{R}P^2$

3) טעם גיאומטרי של S^2_g:

נשים לב שכל ~~הצלעות~~ הקודקודים ~~ו~~ ילכו לנקודה אחת.

אז $\sim/_g$ =  ← ספירה עם g חורים

וגם $\sim/_g$ =  ← טורוס עם חור (ידית)

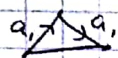
מתאימים בין החורים, ונקבל ספרה עם g טורוסים מחוברים למעלה

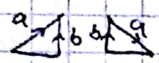
למה זה ידיעה? סביב כל נקודה אפשר לקחת מעגל. אם זה מעגל על צלע או קודקוד, המשך המעגל ממשיך במקום אחר. דוגמה על טורוס:

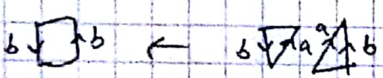
4) טעם גיאומטרי של $\tilde{S}^2_g$:

נעשה אותה חלוקה כמו קודם.

אז $\sim/_g$ = ספירה עם g חורים

נשים לב:  ← סרט מוביוס!

למה? נפריד קודם 

ונחבר קודם לפי a ואז לפי b:  ← סרט מוביוס (זה טריק)

נחבר כל סרט מוביוס לחור לאורך השפה.

מספר אוילר ואוריינטציה

הגדרה - יהי X מרחב קומפקטי. שילוש של X זה כיסוי סופי $X=\bigcup_{i=1}^{m} Y_i$ סגורות כך שלכל $i=1...m$ קיים $\varphi_i: Y_i \to T$ משולש

וגם כל חיתוך בין Y_i ל- Y_j הוא ריק, קודקוד, או צלע (שצורת התמונה לישרה)

נניח ש- $X=\bigcup_{i=1}^{m} Y_i$ שילוש. אז מספר אוילר מוגדר:

$$e(X) = \underbrace{V}_{\text{קודקודים}} - \underbrace{E}_{\text{צלעות}} + \underbrace{T}_{\text{משולשים}}$$

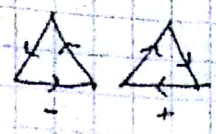
משפט - מספר אוילר בלתי תלוי בשילוש והוא אינווריאנט טופולוגי

$e(S^2) = 2$

$e(S^2_g) = 2-2g$

$e(\tilde{S}^2_g) = 2-g$

הגדרה - אוריינטציה של משולש: יש 2:



אוריינטציה של משטח (מסגור עם שילוש): האוריינטציה של כל משולש כך שעל כל צלע שני ה-Δ הצמודים מגדירים אוריינטציה נגדית. דוגמה:

אם האוריינטציה קיימת אזי ~~[illegible]~~ המשטח נקרא אוריינטבילי.

משפט - אוריינטביליות בת"ל בבחירת שילוש, והיא אינווריאנט טופולוגי.

דוגמה - סרט מוביוס אינו אוריינטבילי. אפשר לבדוק בשילוש הזה:

יריעות חלקות, תת-יריעות, שיכון יריעות לתוך מרחב אוקלידי

* נדבר רק על יריעות ללא שפה, למרות שהכל ניתן להכללה.

הגדרה - תהי X יריעה n מימדית. היא יריעה ממחלקת C^k אם קיים מבנה חלק מסדר k על X זה כיסוי פתוח $X=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ כך שלכל $\alpha\in A$ קיים הומיאומורפיזם $\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^n$ ← אטלס

ולכל $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ העתקה:

$$\mathbb{R}^n \supset \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\subset\mathbb{R}^n$$

$$f_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1} \rightarrow \text{דיפאומורפיזם מסדר } K$$

דוגמאות - $\mathbb{R}^n$, S^n, S^1 יריעות מסדר C^∞

משפט - תהי $f:U\to\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}^m$ פתוחה

נניח $f\in C^k$ (גזירה ברציפות k פעמים)

גרף של F:

$$\Gamma(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{m+n} \mid x\in U,\ y=f(x)\}$$

אזי $\Gamma(f)$ יריעה חלקה מסדר K.

הוכחה - נקח כיסוי של U ע"י כדורים $U=\bigcup_{\alpha\in A} B_{x_\alpha}(\varepsilon_\alpha)$

נקח $U_\alpha=\{(x,y) \mid x\in B_{x_\alpha}(\varepsilon_\alpha),\ y=f(x)\}$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to B_{x_\alpha}(\varepsilon_\alpha)\simeq\mathbb{R}^m$$

נקבל $f_{\alpha\beta}=Id$

הגדרה - תהי X יריעה חלקה n-מימדית מסדר K, תת-קבוצה $Y\subset X$ נקראת תת-יריעה חלקה m-מימדית $(m<n)$ מסדר K אם: קיים מבנה חלק ב-$X=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ כך שלכל נקודה $x\in Y$ קיימת $U_\alpha\ni x$ כך ש-

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha\cap Y \to \mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^n$$
$$\hookrightarrow (x_1,\dots x_m,0\dots 0)$$

מסקנה - תת-יריעה מסדר k ממימד m היא יריעה m-מימדית מסדר K

הוכחה - נסתכל על כיסוי $Y = \bigcup (U_{\alpha_x} \cap Y)$

כן יריעה m- מימדית מהגדרה

$$\begin{tikzcd}
 & (U_\alpha \cap Y) \cap (U_\beta \cap Y) \arrow[dl, "\psi_\alpha"'] \arrow[dr, "\psi_\beta"] & \\
\mathbb{R}^m \arrow[rr, "f_{\alpha\beta}"'] & & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

הרצאה אחרונה

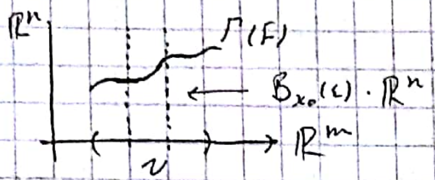
מבחן - מותר להביא חומר פתוח של הרצאות הלבנ

תזכורת - תת-יריעה חלקה - תהי X יריעה n-מימדית חלקה מסדר K, $Y\subset X$.
Y תת יריעה חלקה מסדר K k-מימדית אם לכל נקודה $x_0\in Y$
קיימת סביבה $x_0\in U\subset X$ שהיא החלק של X
כך שההומאומורפיזם $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ לוקח את $U\cap Y$ ל- $\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$ [illegible]
ולוקח את x_0 לראשית

דוגמה - גרף של פונקציה חלקה מסדר K.
תהי $f: V\to\mathbb{R}^n$, $f\in C^k(V)$
V פתוחה ב- $\mathbb{R}^m$
אזי - $\Gamma(f)=\{(\underline{x},\underline{y})\in\mathbb{R}^{m+n}\mid \underline{x}\in V,\ \underline{y}=f(\underline{x})\}$

טענה - $\Gamma(f)\subset\mathbb{R}^{m+n}$ תת יריעה חלקה מסדר K, m-מימדית.

$\mathbb{R}^{m+n}\overset{Id}{\simeq}\underbrace{\mathbb{R}^{m+n}}_{\text{דיפיאומורפיזם}}=\mathbb{R}^{m+n}$



אטלס שלם - כולל את כל $U\subset\mathbb{R}^{m+n}$
$\varphi: U\to\mathbb{R}^{m+n}$
כאשר φ דיפאומורפיזם מסדר K.
כלומר, כל ק- U טוב φ כזה עבורם.

נקח $(x_0,y_0)\in\Gamma(f)$, וסביבה כדורית $x_0\in B_{x_0}(\varepsilon)\subset V$

נבחר קבוצה $U=B_{x_0}(\varepsilon)\times\mathbb{R}^n$

ברור כי $U\overset{C^k}{\simeq}\mathbb{R}^{m+n}$, אך נרצה שגם $U\cap\Gamma(f)\overset{C^k}{\simeq}\mathbb{R}^m$ תחת אותה העתקה.

נבנה $\varphi: U\longrightarrow B_{x_0}(\varepsilon)\times\mathbb{R}^n\overset{C^k}{\simeq}\mathbb{R}^{m+n}$

$\varphi(x,y)=(x,y-f(x))$

נצטרך עוד הזזה של $x\mapsto x-x_0$
כדי לקבל $B_0(\varepsilon)\times\mathbb{R}^n$
כדי ש- x_0 ילך לראשית

ואם אם $(x,y)\in\Gamma(f)$ אזי $y=f(x)$

$\varphi(x_0,y_0)=(x_0,0)$, $\varphi(x,y)=(x,0)\in\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^{m+n}$

נותר להוכיח ש- φ דיפאומורפיזם מסדר K.

$\varphi^{-1}(x,y)=(x,y+f(x))$

Scanned by CamScanner

משפט - תנאי ירועות חלקות במרחב אוקלידי

1) יהי $X \subset \mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י מערכת משוואות $\begin{cases} F_1(x)=0 \\ F_r(x)=0 \end{cases}$

כאשר $F_1 \dots F_r$ פונקציות חלקות מסדר K

כך שלכל $x \in X$:

$$\operatorname{rank} J(F_1 \dots F_r)\big|_x = r$$ (זו מטריצה $r \times n$)

אזי X תת יריעה חלקה מסדר K ממימד $n-r$

2) תהי $X \subset \mathbb{R}^n$ המוגדרת כתמונה של העתקה $\phi : U \to \mathbb{R}^n$

ϕ חלקה מסדר K ומקיימת עבור כל נקודה $x \in U$: ש פתוחה ב- $\mathbb{R}^m$. $m<n$

$\operatorname{rank} J(\phi)|_x = m$ (זו מטריצה $n \times m$)

אזי לכל $x \in U$ קיימת סביבה $x \in \mathcal{U} \subset U$ כך שהתמונה $X = \varphi(\mathcal{U})$

תת יריעה ב- $\mathbb{R}^n$ חלקה מסדר K.

הוכחה -

1) $x \in X$. $\operatorname{rank} J(F_1 \dots F_r)|_x = r$

אז יש:

$$r \left[\underbrace{\left(\begin{matrix} \det M \\ \neq 0 \end{matrix} \;\middle|\; \quad \right)}_{\substack{x_1 \dots x_r,\, x_{r+1} \dots x_n \\ n}} \right]$$

ממשפט הפונקציה הסתומה קיימת $x \in \mathcal{U}$ כך ש:

$$\left.\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1} \dots x_n) \\ \vdots \\ x_r = f_r(x_{r+1} \dots x_n) \end{cases}\right\} = X \cap \mathcal{U}$$

$$f_1 \dots f_r \in C^K$$

2) תרגיל

קומפקטית ללא שפה

משפט - תהי X יריעה סגורה, n-מימדית, חלקה מסדר K,

אז קיים $N \in \mathbb{N}$ והעתקה $\phi : X \to \mathbb{R}^N$ כך ש- $\phi \in C^K$ דיפאו'

של X על $\phi(X)$ שהיא תת יריעה חלקה n-מימדית מסדר K.

($\phi \in C^K$, לכל נקודה $x \in X$ וסביבה $x \in \mathcal{U}$ מהאטלס החלק,

$\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ העתקה, $\phi \circ \varphi^{-1}$ - חלקה מסדר K)

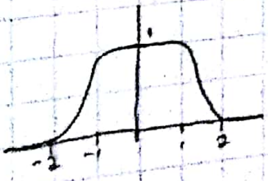
הוכחה -

למה - קיימת פונקציה $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lambda \in C^\infty$

ומקיימת: א) $\lambda(x) = 1$, $x \in \overline{B_0}(1)$

ב) $0 < \lambda(x) < 1$, $x \notin \overline{B_0}(1)$

$\lambda(x) = 0$, $x \notin B_0(2)$



הוכחה:

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(t-1)(t-2)}} & 1<t<2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\beta(t) = 1 - \frac{\int_1^t \alpha(\tau)\,d\tau}{\int_1^2 \alpha(\tau)\,d\tau}$$

המשך - תרגיל בבית.

Scanned by CamScanner

המשך הוכחה -

נקח כיסוי של X ע"י סביבות מהאטלס החלק: $X=\bigcup_{x\in X} U_x$

לכל i , $V_x \subset W_x \subset U_x \overset{\varphi_x}{\cong} \mathbb{R}^n$

$V_x = \varphi_x^{-1}(B_0(1))$, $W_x = \varphi_x^{-1}(B_0(2))$

מקומפקטיות, $X=\bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$

נגדיר $N=m\cdot n+m$

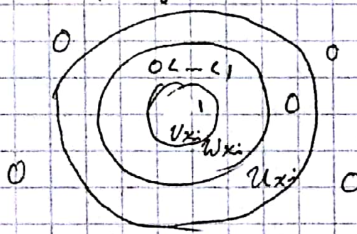
נגדיר $\Phi : X \to \mathbb{R}^N$

$\Phi = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_m,\{\lambda_{ij}\}_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}}\}$

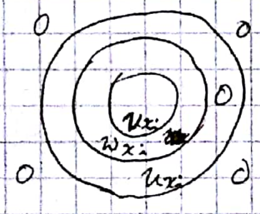
כאשר: $\lambda_i : X \to \mathbb{R}$

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}\lambda(\varphi_{x_i}^{-1}(x)) & ,\ x\in U_{x_i}\\ 0 & ,\ o.w.\end{cases}$$

$$\varphi_{x_i}: U_{x_i} \to \underset{(y_{i1}\dots y_{in})}{\mathbb{R}^n} \qquad \lambda_{ij}(x)=\begin{cases} y_{ij}\lambda_i(x) & ,\ x\in U_{x_i}\\ 0 & ,\ o.w.\end{cases}$$



כלומר: $\leftarrow \lambda_i$ אפשר לראות שהיא רציפה וגזירה.



למה Φ חח"ע?

נקח $x', x''\in X$ ונראה כי $\Phi(x')\neq\Phi(x'')$

א) נניח ש- $x'\in V_{x_i}$ ו- $x''\notin V_{x_i}$

אז $\lambda_i(x')=1$, $\lambda_i(x'')<1$

ב) נניח $x'\neq x''\in V_{x_i}$

אז $\varphi_{x_i}(x')=(y'_{i1}\dots y'_{in})$, $\varphi_{x_i}(x'')=(y''_{i1}\dots y''_{in})$

מקיפ', קיימת j כך ש- $y'_{ij}\neq y''_{ij}$.

נקבל:

$\lambda_{ij}(x')=y'_{ij}$, $\lambda_{ij}(x'')=y''_{ij}$

תנאי היעקביאן: לכל $x\in X$, $x\in V_{x_i}$, $\varphi_{x_i}(V_{x_i})=B_0(1)$

מסדר $N\times n$ $\rightarrow$ $J=\dfrac{D(\lambda_1\dots\lambda_m,\{\lambda_{ij}\})}{D(y_{i1}\dots y_{in})}$

$\cup$

$$\frac{D(\lambda_{i1}\dots\lambda_{in})}{D(y_{i1}\dots y_{in})}=\frac{D(y_{i1}\dots y_{in})}{D(y_{i1}\dots y_{in})}=I$$ $\longleftarrow$ והמשפט הקודם סיים.

משפט - תתי יריעות חלקות במרחב אוקלידי

ש) יהי $\mathbb{R}^n$ ו-U: ש $m<n$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$

העתקה חלקה מסדר k המקיימת לכל נקודה $x\in U$

$J(\psi)|_x = m$ אזי

אזי לכל נקודה $x\in U$ קיימת סביבה $x\in V\subset U$ כך ש- $\psi(V)\subset\mathbb{R}^n$

תת יריעה ב-$\mathbb{R}^n$ חלקה מסדר k ממימד m.

הוכחה - תרגיל (משתמשים בפונקציה סתומה)

הערה - נראה כי לכל נקודה $z\in\phi(x)\subset\mathbb{R}^n$ קיימת סביבה $z\in U\subset\mathbb{R}^n$ והעתקה

$G: U\to\mathbb{R}^m$ ~~...~~ דיפ׳ חלק מסדר k.

$$G: U\cap\phi(x) \rightleftarrows \mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^m$$

~~$x\in V_x \xrightarrow{\text{דיפ׳}} B_0(1)$~~ מהם

$z\in\phi(V_{x_0}) = (z_1\ldots z_n, \{z_{ij}\})$ (נסמן $(z_1\ldots z_n, \{z_{ij}\})$)

$$x=\phi^{-1}(z)\in V_{x_0} \xrightarrow{\text{דיפ׳}} B_0(1)$$

סביבה של z: (מרס קטן מספיק)

$$U = \begin{cases} |z_i - z_i(x)|<\varepsilon & i=1\ldots m \\ |z_{ij} - z_{ij}(x)|<\varepsilon & i=1\ldots m,\ j=1\ldots n \end{cases}$$

$\phi(x)\cap U = \{z' = (\ldots, y_i \ldots y_{\ldots}\ldots)$

נראה שזה גרף של העתקה.

להשלים.

דוגמאות - $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$

$F(x_1\ldots x_n) = x_1^2+\ldots+x_n^2-1$

$\nabla(F) = (2x_1\ldots 2x_n)\neq 0$ (כי $0\notin S^{n-1}$)

לכן זו תת יריעה מסדר ∞ ממימד $n-1$

- $T^2\subset\mathbb{R}^3$ $\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2-1=0$

זו תת יריעה מסדר ∞ ממימד 2

- עקומה חלקה ב-$\mathbb{R}^n$ $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n$

$\gamma'(t)\neq 0$ לכל $t\in(a,b)$

6 שעות 5 שאלות [illegible]

[illegible]