טופולוגיה - הרצאה 1

* המרצה אומר שהתרגול יותר חשוב מההרצאות

בוחן אמצע 20.12 ציון מגן

סילבוס במודל ובאתר - math.tau.ac.il/~shustin/teaching.html

רוב ההודעות עולות לאתר ונשלחות במייל.

שעות קבלה - א' 16-18 שרייבר 112

ספרי לימוד - J. Munkres בספר כל החומר

בסוף כל שיעור יעלה למודל רשימת נושאים שעברו.

מה נלמד? - מה זה מרחב טופולוגי
- תכונות בסיסיות של מרחבים טופולוגים
- דברים אמיתיים (פתירת בעיה עם משמעות מעניינת)

מרחבים טופולוגיים

1) הגדרות

דוגמה - $\mathbb{R}$. קבוצות פתוחות - $\mathbb{R}$, $\emptyset$, (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$, $\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$

הגדרה - תהי $X\neq\emptyset$, 2^X קבוצת החזקה.
$\Omega\subset 2^X$ טופולוגיה ב-X אם:
1 - $\emptyset, X\in\Omega$
2 - $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq\Omega \Leftarrow \bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\in\Omega$ (סגירות לכל איחוד)
3 - $U_1,\dots,U_n\in\Omega \Leftarrow \bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\Omega$ (סגירות לחיתוך סופי)

$U\in\Omega$ קבוצה פתוחה

(X,Ω) נקרא מרחב טופולוגי.

דוגמאות - X קבוצה כלשהי. $\Omega=\{\emptyset,X\}$ טופולוגיה אנטי דיסקרטית.
- X קבוצה כלשהי. $\Omega=2^X$ טופולוגיה דיסקרטית.
- X קבוצה אינסופית. $\Omega=\{\emptyset, X,$ כל משלימים לקבוצה סופית$\}$ טופולוגיה קו-פינית (cofinite)
- $X=\{a,b\}$:
$\Omega_{ad}=\{\emptyset,\{a,b\}\}$
$\Omega_d=\{\emptyset,\{a,b\},\{a\},\{b\}\}$
$\Omega'=\{\emptyset,\{a,b\},\{a\}\}$
$\Omega''=\{\emptyset,\{a,b\},\{b\}\}$

הגדרה - תהי $X\neq\emptyset$ קבוצה. Ω',Ω'' שתי טופולוגיות ב-X.
אם $\Omega'\subset\Omega''$, אז Ω' הקטנה ו-Ω'' הגדולה.

הגדרה - יהי (X,Ω) מ"ט.
$\Lambda\subset 2^X$ אוסף כל המשלימים לקבוצות פתוחות $F\in\Lambda$ סגורה.

משפט - קבוצה ת"ק סגורות Λ מקיימת:
1) $\phi, X \in \Lambda$
2) $F_1 \dots F_n \in \Lambda \Leftarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \Lambda$
3) $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \Lambda \Leftarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \Lambda$

הוכחה - קל.

משפט - $X \neq \phi$ קבוצה. $\Lambda \subset 2^X$ מקיים את 1,2,3 מהמשפט הקודם.
אזי -
$\Omega = \{X \setminus F \mid \forall F \in \Lambda\}$ טופולוגיה ב-X.

הגדרה - יהי (X, Ω) מ"ט. $A \subset X$ ת"ק כלשהי.
אם $U \in \Omega$ מכלה את A $(A \subset U)$ אזי U סביבה (פתוחה) של A.
אם $x \in X$ נקודה ו- $x \in U$ (U פתוחה) אזי U סביבה של x.

2) בסיס לטופולוגיה

דוגמה - $\mathbb{R}^n$, $\bigcup_{x,r} D_x(r) = U$

הגדרה - (X, Ω) מרחב טופולוגי. ת"ק $\Sigma \subset \Omega$ נקראת בסיס לטופולוגיה Ω אם לכל $\emptyset \neq U \in \Omega$
קיים $U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, כאשר $V_\alpha \in \Sigma$.

דוגמאות - $\Sigma = \{D_x(r)\}$, $\Sigma' = \{D_x(2)\}$ $(r \in \mathbb{Q}^+, x \in (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{Q},$ במניה!)
כדורים פתוחים
- $\Omega = 2^X$, $\Sigma = \{\{x\}_{x \in X}\}$

שאלות - 1) (X, Ω) מ"ט ו- $\Sigma \subset \Omega$.
האם Σ בסיס ל- Ω.
2) $X \neq \phi$ קבוצה, $\Sigma \subset 2^X$, האם Σ בסיס לטופולוגיה כלשהי?

משפט - $\Sigma \subset \Omega$ בסיס לטופולוגיה $\Longleftrightarrow$ $\forall(\emptyset \neq U \in \Omega). \forall(x \in U). \exists(\emptyset \neq V \in \Sigma). [x \in V \subset U]$

הוכחה - תרגיל.

משפט - $X \neq \phi$ קבוצה, $\Sigma \subseteq 2^X$ בסיס לטופולוגיה כלשהי $\longleftrightarrow$
א) $X = \bigcup_{V \in \Sigma} V$
ב) $\forall(V, W \in \Sigma). \forall(x \in V \cap W). \exists(z \in \Sigma). [x \in Z \subset V \cap W]$

הוכחה $\Leftarrow$ בהנתן ש- Σ בסיס נוכיח את א, ב.
א - כי X פתוחה
ב - V, W קבוצות פתוחות לפי הגדרה.
$V \cap W$ פתוחה לפי הגדרה, $\Leftarrow$ $\bigcup_{\alpha \in A} Z_\alpha = V \cap W$ $(Z_\alpha \in \Sigma)$

$\Rightarrow$ נבנה טופולוגיה Ω ב-X כך ש-Σ בסיס ל-Ω.
נגדיר $\Omega = \{\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \mid V_\alpha \in \Sigma\}$
נבדוק שזאת טופולוגיה.
1) $\phi \in \Omega$, $X \in \Omega$ לפי א'
2) איחודים קבוצות מ-Ω גם שייכים ל-Ω (לפי הבנייה)
3) חיתוכים סופיים - $U_1, U_2 \in \Omega$.
$U_1 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha^{\in \Sigma}$, $U_2 = \bigcup_{\beta \in B} W_\beta^{\in \Sigma}$

$U_1 \cap U_2 = (\bigcup_\alpha V_\alpha) \cap (\bigcup_\beta W_\beta) = \bigcup_{\alpha,\beta} (V_\alpha \cap W_\beta)$
$\bigcup Z_i^{\in \Sigma}$ לפי ב. וממשיכים באינדוקציה. $\square$

הגדרה - יהי (X,Ω) מ"ט. $\Sigma\subset\Omega$ בסיס לטופולוגיה Ω.
$\Sigma'\subset\Sigma$ נקרא **פרי-בסיס** (Prebase) אם:
$\forall(V\in\Sigma) . V=\bigcap_{i=1}^{n} W_i , W_i\in\Sigma'$
חיתוך סופי

דוגמה - X אינסופית, Ω טופולוגיה קו-סופית. $\Sigma'=\{X\setminus\{x\} | x\in X\}$ פרי-בסיס.

למה - $X\neq\emptyset$ קבוצה, $\Sigma'\subset 2^X$ פרי-בסיס לטופולוגיה כלשהי $\longleftrightarrow$ $X=\bigcup_{V\in\Sigma'} V$

הוכחה - תרגיל.

3) מרחבים מטריים

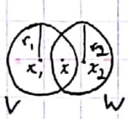
הגדרה - $X\neq\emptyset$ קבוצה, פונ' $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ נקראת **מטריקה** אם:
1) $\rho(x,y)\geq 0$, $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,y)>0$ $(x\neq y)$
2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3) אי"ש Δ - $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

דוגמאות - 1) $\mathbb{R}^n$, מטריקה אוקלידית $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

הגדרה - (X,ρ) מרחב מידה, $x\in X$, $r\in\mathbb{R}^+$
כדור הפתוח:
$$D_x(r)=\{y\in X \mid \rho(x,y)<r\}$$

משפט - (X,ρ) מ"מ, $\Sigma=\{D_x(r)\mid x\in X, r>0\}$ בסיס לטופולוגיה ~~א~~ מטרית Ω_ρ

הוכחה - א- $X=\bigcup_{x\in X} D_x(1)$
ב-



$d=\rho(x_1,x_2)\le\rho(x_1,x)+\rho(x_2,x)<r_1+r_2$

בוחרים $\varepsilon>0$ כך ש- $D_x(\varepsilon)\subset D_{x_1}(r_1)\cap D_{x_2}(r_2)$
אז $\varepsilon+\rho(x_1,x)<r_1$
$\varepsilon+\rho(x_2,x)<r_2$. קל לראות ש- ε כזה קיים. $\square$

מסקנה - (X,ρ) מ"מ, $U\subset X$ פתוחה בטופולוגיה המטרית. $\longleftrightarrow$
$\forall(x\in U).\exists(r>0). D_x(r)\subset U$

דוגמה - $\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$ מגדירה טופולוגיה דיסקרטית.

הגדרה - (X,Ω) מ"ט. אם קיימת מטריקה ρ ב- X כך ש- $\Omega=\Omega_\rho$
אז Ω טופולוגיה **מטריזבילית**.

דוגמה - X קבוצה בת לפחות 2 נק', אזי טופולוגיה אנטי דיסקרטית אינה מטריזבילית.

הערה - מטריקות שונות לפעמים מגדירות אותה טופולוגיה.
למשל - $a\rho_2(x,y)\le\rho_1(x,y)\le b\cdot\rho_2(x,y)$, $a,b\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\Omega_{\rho_1}=\Omega_{\rho_2}$

4) נק' ותתי קבוצות במרחב טופולוגי

הגדרה - יהי (X,Ω) מרחב טופולוגי, $A\subset X$ ת"ק. $x\in X$ נקודה.

1) $(Int(x))$ x נקראת **נקודה פנימית** של A אם קיימת סביבה (פתוחה) $x\in U_x$ כך ש- $U_x\subset A$

2) $(Int(X\setminus A))$ x נקראת **נקודה חיצונית** ל- A אם קיימת סביבה $x\in U_x$, $U_x\cap A\neq\emptyset$

3) $\partial(A)$ x נקראת **נקודת שפה** אם לכל סביבה $x\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$, $U\cap\bar{A}\neq\emptyset$
$(U\setminus A\neq\emptyset)$

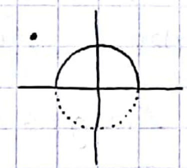
טענה - $X=Int(A)\cup Int(X\setminus A)\cup\partial A$ איחוד זר

הגדרה - 4) x **נק' גבול** אם לכל סביבה $x\in U$ $(U\setminus\{x\})\cap A\neq 0$

5) x נקראת **נקודת הצטברות** אם לכל סביבה $x\in U$, $U\cap A\neq\emptyset$

6) x **נקודה מבודדת** אם קיימת סביבה של $x\in U$ כך ש- $U\cap A=\{x\}$

דוגמה - $\mathbb{R}^2$



נק' פנימיות - כל העיגול בלי השפה ~~[illegible]~~
נק' חיצוניות - כל החיצון בלי השפה
נק' שפה - כל המעגל + הנקודה
נק' גבול - כל המעגל
נק' הצטברות - כל העיגול והנקודה
נק' מבודדת - הנקודה

משפט - 1) $Int(A)\subset A$
2) $Int(A)$ קבוצה פתוחה
3) $Int(A)$ הקבוצה הפתוחה המקסימלית בתוך A

הוכחה - תרגיל.

מסקנה - A פתוחה $\longleftrightarrow$ $Int(A)=A$

הגדרה - יהי (X,Ω) מ"ט, $A\subset X$ תת קבוצה. **סגור** של A $\bar{A}=cl(A)$ הוא קבוצת נק' ההצטברות של A.

משפט - 1) ~~[illegible]~~ $A\subset\bar{A}$
2) $\bar{A}$ סגורה
3) $\bar{A}$ הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A

הוכחה - תרגיל.

משפט -
$$\bar{A}=Int(A)\cup\partial A$$
$$\bar{A}\setminus\partial A=Int(A)$$
$$\bar{A}\setminus Int(A)=\partial A$$

דוגמה - $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, $Int(\mathbb{Q})=\emptyset$, $\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}$