טופולוגיה

ארזים ©

28 בנובמבר 2016

1 אקסיומות ההפרדה

ניזכר באקסיומות:

1. X הוא T_1 אם לכל $x,y\in X$ שונים קיימות קבוצות פתוחות U,V כך שמתקיים $x\in U,y\in V,x\notin V,y\notin U$ (באופן שקול, יחידונים הם קבוצות סגורות).
2. X הוא T_2 אם לכל $x,y\in X$ שונים קיימות קבוצות פתוחות וזרות U,V כך שמתקיים $x\in U,y\in V$ (באופן שקול, האלכסון $\Delta\subseteq X\times X$ $\{(x,x)\mid x\in X\}$ הוא קבוצה סגורה).
3. X הוא T_3 אם לכל $x\in X$, $A\subseteq X$ סגורה עם $x\notin A$ הן ניתנות להפרדה.
4. X הוא T_4 אם לכל שתי קבוצות סגורות וזרות, הן ניתנות להפרדה.

תרגיל יהי X מרחב טופולוגי, ויהי צט מרחב האוסדורף. יהיו $f,g\in C\left(X\to Y\right)$. אזי הקבוצה

$$C\left(f,g\right)=\left\{x\in X\mid f\left(x\right)=g\left(x\right)\right\}$$

היא סגורה.

פתרון נתבונן בהעתקה

$$\begin{array}{rcl} f\times g:X & \to & Y\times Y\\ \left(f\times g\right)\left(x\right) & = & \left(f\left(x\right),g\left(x\right)\right) \end{array}$$

כעת מתקיים

$$C\left(f,g\right)=\left(f\times g\right)^{-1}\left(\Delta\right)$$

ולכן סגורה - תמונה הפוכה של קבוצה סגורה על ידי פונקציה רציפה.

מסקנה 1.1 בתנאי התרגיל הקודם, אם $X\subseteq A$ צפופה, $f\mid_{A}=g\mid_{A}$, אזי $f=g$.

הוכחה: $A\subseteq C\left(f,g\right)$, ולכן $X=\overline{A}\subseteq C\left(f,g\right)$, ולכן $C\left(f,g\right)=X$. ■

תרגיל יהי X מרחב נורמלי, $f:X\to Y$ העתקה רציפה, סגורה ועל. אזי Y נורמלי.

פתרון יהיו $F_1,F_2\subseteq Y$ סגורות וזרות. נקח $U_1,U_2\subseteq X$ פתוחות וזרות שמפרידות בין $f^{-1}\left(F_1\right),f^{-1}\left(F_2\right)$. נסמן $V_1=Y\backslash f\left(X\backslash U_1\right),V_2=Y\backslash f\left(X\backslash U_2\right)$, ואלה פתוחות. נבדוק שאלה זרות.
נניח כי $y\notin f\left(X\backslash U_1\right),f\left(X\backslash U_2\right)$. קיים $x\in X$ עבורו $f\left(x\right)=y$, ולכן $x\in U_1\cap U_2$ בסתירה. לכן הקבוצות V_1,V_2 אכן זרות.
כעת נבדוק כי $F_1\subseteq V_1$. יהי $y\in F_1$. אם $y\notin V_1$ אזי $y=f\left(x\right)$ כאשר $x\in X\backslash U_1$, אבל זו סתירה כי $f^{-1}\left(F_1\right)\subseteq U_1$. כך מוכיחים גם עבור $F_2\subseteq V_2$.

2 אקסיומות המניה

ניזכר גם באקסיומות המניה:

1. X הוא S_1 אם לכל $x\in X$ יש קבוצות פתוחות $B_1\supseteq B_2\supseteq\ldots$ כך שמתקיים $x\in\bigcap B_i$ וכן אם U סביבה של X אזי יש i עבורו $B_i\subseteq U$.
2. X הוא S_2 אם קיים לו בסיס בן מניה.
3. X הוא ספרבילי אם יש בו תת קבוצה צפופה בת מניה.

הגדרה 2.1 יהי X מרחב טופולוגי. נגיד כי $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ מתכנסת אל $x\in X$ אם לכל סביבה U של x יש $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $x_n\in U$.

תרגיל אם X הוא האוסדורף, אז לכל סדרה יש לכל היותר גבול אחד.

הוכחה: נניח כי $x_n\to x,x'$, $x\neq x'$, ניקח $x\in U',x\in U$ כאשר U,U' פתוחות וזרות. החל ממקום מסויים $x_n\in U,U'$, ולכן גם $x_n\in U\cap U'$. ■

דוגמא נתבונן במרחב $X=\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקו־סופית, ובסדרה $x_n=n$. אזי כל $x\in\mathbb{R}$ הוא גבול של הסדרה ־ בהינתן $x\in\mathbb{R}$, U סביבה של x, ברור כי פרט למספר סופי של n, מתקיים $x_n\in U$.

הגדרה 2.2 עבור $A\subseteq X$ נסמן בתור $S\left(A\right)$ את אוסף כל הגבולות של סדרות מתוך A.

תרגיל

1. $S\left(A\right)\subseteq\overline{A}$.
2. אם X הוא S_1, אזי $S\left(A\right)=\overline{A}$.

פתרון

1. בהינתן $x\in S\left(A\right)$, ניקח $x_n\to x$, ואז אם U סביבה של x, U מכילה איברים מתוך x_n ובפרט חותכת את A.

2. יהי $x \in \overline{A}$. נקח $x_i \in B_i \cap A$, ונטען כי $x_i \to x$. תהי U סביבה של x. יש i כך שמתקיים $B_i \subseteq U$, ולכן לכל $j > i$ מתקיים

$$x_j \in B_j \cap A \subseteq B_i \cap A \subseteq U$$

הגדרה 2.3 $f : X \to Y$ רציפה סדרתית אם לכל $x_n \to x$ בתוך X, $f(x_n) \to f(x)$ בתוך Y.

תרגיל אם f רציפה אז היא רציפה סדרתית. אם X הוא S_1 וכן f רציפה סדרתית אזי f רציפה.

פתרון ראשית, תהי $x_n \to x$, ותהי V סביבה של $f(x)$. אזי $f^{-1}(V)$ סביבה של x, ולכן עבור $N < n$ מתקיים $x_n \in f^{-1}(V)$, כלומר $f(x_n) \in V$.
כעת, נניח כי X הוא S_1 וכי f רציפה סדרתית. נבדוק שלכל $A \subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$. יהי $y \in f\left(\overline{A}\right)$. כלומר $y = f(x)$ באשר $x \in \overline{A}$, ומהתרגיל הקודם יש $x_n \in A$ עם $x_n \to A$, ואז $f(x_n) \to f(x)$, וכמובן $f(x_n) \in f(A)$, כלומר

$$y = f(x) \in \overline{f(A)}$$

דוגמא ניקח את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקו־בת מניה, כלומר קבוצה היא פתוחה אם המשלים שלה בן מניה. נקח סדרה $\{x_n\}$, ונגדיר $U = \mathbb{R} \backslash \{x_n\}$. אם $x \in U$ אז בבירור $x_n \not\to x$. תרגיל ־ הראו כי $x_n \to x$ אם ורק אם $x_n = x$ החל ממקום מסויים. כלומר בטופולוגיה זו $S(A) = A$ לכל A. העתקת הזהות ממרחב זה למרחב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, היא רציפה סדרתית (כי כל סדרה מתכנסת היא קבועה ממקום מסויים), אבל לא רציפה (תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה לא תהיה דווקא פתוחה).

הגדרה 2.4 J סדורה חלקית מכוונת אם לכל $\alpha, \beta \in J$ יש $\gamma \in J$ כך שמתקיים $\alpha, \beta \le \gamma$.
רשת במרחב X היא העתקה $f : J \to X$. מתי רשת מתכנסת לנקודה x? אם לכל U סביבה של x יש $\alpha \in J$ כך שלכל $\beta \ge \alpha$, מתקיים $f(\beta) \in U$.

מתקיים: $x \in \overline{A}$ אם ורק אם יש רשת של איברים מתוך A שמתכנסת אל x. כיוון אחד הוא קל. בהינתן $x \in \overline{A}$ ניקח J שהיא קבוצת הסביבות של X, ונגדיר $U \le V$ אם $V \subseteq U$. כעת, פונקציית בחירה, מסביבה U לנקודה $x_u \in U$, תהיה רשת שמתכנסת אל X.