<u>טופולוגיה</u>

ⓒ ארזים

21 בנובמבר 2016

1 רציפות והומיאומורפיזמים

הגדרה 1.1 פונקציה $f : X \to Y$ רציפה אם לכל $V \subseteq Y$ פתוחה $f^{-1}(V)$ פתוחה.

הערה 1.2 אם B בסיס של Y מספיק לבדוק את ההגדרה על איברי הבסיס.

דוגמא $C(X) = C(X \to \mathbb{R})$ - זהו חוג.

תרגיל אם $f, g \in C(X)$ הראו כי $|f|, \max\{f,g\} \in C(X)$.

פתרון

$$|f|^{-1}((a,b)) = f^{-1}((-b,-a)) \cup f^{-1}((a,b))$$

ולכן $|f|$ רציפה. כעת

$$\max\{f,g\} = \frac{|f-g| + f + g}{2}$$

ובשיעורי בית נראה שהנוסחא הזו מבטיחה רציפות (חיבור וקפל בקבוע משמרים רציפות).

תנאים סגורים, פתוחים אם $f \in C(X)$ אזי:

1. $\{x \mid f(x) > 0\} = f^{-1}((0,\infty))$ פתוחה.
2. $\{x \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ סגורה.
3. $\{x \mid f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0,\infty))$ סגורה.

1.1 כיסוי יסודי

הגדרה 1.3 יהי X מרחב טופולוגי ויהי $X = \bigcup A_i$ כיסוי. הכיסוי נקרא <u>יסודי</u> אם לכל $A \subseteq X$ הקבוצה A פתוחה אם ורק אם $A \cap A_i$ פתוחה בתוך A_i לכל i.

טענה 1.4 יהי $X = \bigcup A_i$ כיסוי יסודי ויהי Y מרחב טופולוגי. תהי $f : X \to Y$ פונקציה. אם לכל i מתקיים $f|_{A_i} \to Y$ רציפה, אזי f רציפה.

הוכחה: תהי $V \subseteq Y$ פתוחה. אזי

$$f\mid_{A_i}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A_i$$

וזו פתוחה בתוך A_i, אבל אנחנו בכיסוי יסודי, לכן $f^{-1}(V)$ פתוחה. ■

דוגמא כל כיסוי פתוח הוא יסודי. נניח כי הכיסוי הוא $X = \bigcup U_i$. בבירור אם $A \subseteq X$ פתוחה אזי $A \cap U_i$ פתוחה בתוך U_i לכל i. אם החיתוך פתוח לכל i, אזי $A = \bigcup A \cap U_i$, וקל לראות שאלה קבוצות פתוחות כולן.
לעומת זאת, כל כיסוי סופי וסגור אינו יסודי.

1.2 הומיאומורפיזמים

הגדרה 1.5 מרחבים טופולוגיים נקראים הומיאומורפיים אם יש העתקה הפיכה רציפה ביניהם, שגם ההופכית שלה רציפה. מסמנים $X \simeq Y$.

דוגמאות

1. $B^n \simeq \mathbb{R}^n$. נגדיר

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|^2}$$

זו פונקציה רציפה והפיכה, שההופכית שלה רציפה (קל לבדוק).

2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{|x|, |y| > 1\}$ הומיאומורפי לריבוע סגור בלי קודקודיו.

1.3 טופולוגיית זריצקי

נסמן $K[x_1, \ldots, x_n]$ את כל הפולינומים במשתנים $x_1, \ldots, x_n$. בהנתן S, תת קבוצה של פולינומים כאלה, נגדיר

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall f \in S \;\; f(x) = 0\}$$

כעת

$$\begin{aligned} V(S) \cup V(S') &= V(S \cdot S') \\ \bigcap V(S_i) &= V\left(\bigcup S_i\right) \end{aligned}$$

כאשר מכפלת קבוצות פולינומים היא קבוצת המכפלות. לכן הקבוצות $V(S)$ מקיימות את האקסיומות של קבוצות סגורות.

עבור $n = 1$, נקבל שהקבוצות הסגורות הן הקבוצות הסופיות, כלומר זו הטופולוגיה הקו־סופית.

באופן כללי, יהיו $p, q \in \mathbb{R}^n$ שונות. אזי יש U פתוחה המקיימת $p \in U, q \notin U$. נסמן $q = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$, אזי $f(x) = \left(x_1 - x^1\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x^n\right)^2$, שהשורש היחיד שלה הוא q, מגדיר את הקבוצה שמפרידה אותן.

אבל הטופולוגיה הזו לא האוסדורף: כל שתי קבוצות פתוחות יחתכו.