טופולוגיה

ארזים ©

15 בנובמבר 2016

נוכיח שיש אינסוף ראשוניים. **הוכחה:** נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ באופן הבא: נגדיר

$$B_{a,d} = \{a + nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ואז נגדיר

$$\mathcal{B} = \{B_{a,d} \mid a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}\}$$

וזהו בסיס. מדוע? ניקח $B_{a_1,d_1}, B_{a_2,d_2} \in \mathcal{B}$, וניקח $z \in B_{a_1,d_1} \cap B_{a_2,d_2}$, ונרצה להראות כי $z \in B_{z,d_1d_1} \subseteq B_{a_1,d_1} \cap B_{a_2,d_2}$. נחשב:

$$z + md_1d_2 = a_1 + n_1d_1 + md_1d_2 = a_1 + (n_1 + md_2)\, d_1 \in B_{a_1,d_1}$$

באותו אופן נשיג שייכול לנחתך השני.
כעת נשים לב כי $B_{a,d}$ סגורות:

$$B_{a,d}^c = \bigcup_{b \neq a} B_{b,d}$$

כעת נתבונן בקבוצה ($\mathbb{P}$ היא קבוצת הראשוניים):

$$A := \bigcup_{p \in \mathbb{P}} B_{0,p}$$

נרצה לטעון כי $A^c = \{-1, 1\}$. בבירור $-1, 1$ לא בתוך A, אבל כל מספר אחר מתחלק בראשוני כלשהו, ולכן יופיע בסדרה $B_{0,p}$ של הראשוני הזה.
אם יש כמות סופית של ראשוניים, אז A סגורה, ולכן $\{-1,1\}$פתוחה, בסתירה - כל קבוצה פתוחה היא אינסופית. ■

1 סגירות

הגדרה 1.1 במרחב טופולוגי (X, τ), נגדיר על תת מרחב $A \subseteq X$ טופולוגיה:

$$\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$$

הגדרה 1.2 אם $A \subseteq X$, נגדיר $\overline{A} \subseteq X$, הסגור של X, שהיא הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A, או חיתוך כל הסגורות שמכילות את A.

ראינו כי $x \in \overline{A}$ אם ורק אם לכל סביבה U של x מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

טענה 1.3 אם $B \subseteq A \subseteq X$, X מרחב טופולוגי, אזי

$$\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A$$

הוכחה: ניקח $y \in \overline{B}^A$, אזי $y \in A$. נקח $U \subseteq X$ פתוחה עם $y \in U$. נרצה להראות כי $U \cap B \neq \emptyset$. אבל $y \in A \cap U$, כלומר U סביבה של y בתוך A. לכל $A \cap U \cap B \neq \emptyset$, כלומר $U \cap B \neq \emptyset$.

כעת ניקח $y \in \overline{B}^X \cap A$. ניקח סביבה U של y בתוך A, כלומר $y \in A \cap U$. יש להראות כי $A \cap U \cap B \neq \emptyset$. אבל $U \cap B \neq \emptyset$ ולכן $A \cap U \cap B = U \cap B \neq \emptyset$. ■

2 מרחבי מכפלה

ניזכר שהגדרנו טופולוגיה על $X \times Y$, עבור X, Y מרחבים טופולוגיים, על ידי הבסיס $\{U \times V \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$.

טענה 2.1 יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, $A \subseteq X, B \subseteq Y$. אזי

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

הוכחה: נראה שהקבוצה $\overline{A} \times \overline{B}$ קבוצה סגורה:

$$X \times Y \backslash \overline{A} \times \overline{B} = X \backslash \overline{A} \times Y \cup X \times Y \backslash \overline{B}$$

מתקיים כמובן $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$, ולכן

$$\overline{A \times B} \subseteq \overline{\overline{A} \times \overline{B}} = \overline{A} \times \overline{B}$$

כעת יהי $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$. נקח סביבה Ω של (x, y) בתוך $A \times B$. בהכרח קיימים $U \subseteq X, V \subseteq Y$ כך שמתקיים

$$(x, y) \in U \times V \subseteq \Omega$$

$x \in U, x \in \overline{A}$, ולכן $U \cap A \neq \emptyset$. מאותה סיבה $V \cap B \neq \emptyset$, ולכן $U \times V \cap A \times B \neq \emptyset$. לכן $\Omega \cap A \times B \neq \emptyset$, כלומר $(x, y) \in \overline{A \times B}$. ■

הגדרה 2.2 יהי X מרחב טופולוגי ויהי $A \subseteq X$. A נקראת <u>צפופה</u> אם $\overline{A} = X$.

טענה 2.3 A צפופה אם ורק אם A חותכת כל קבוצה פתוחה.

הוכחה: נניח כי A חותכת כל קבוצה פתוחה. יהי $x \in X$ ותהי U סביבה שלו. אזי מהתנאי $A \cap U \neq \emptyset$, ולכן $\overline{A} = X$.

נניח כי A צפופה, ונניח שיש קבוצה פתוחה U שלא נחתכת עם A. מקח $x \in U$. אזי U סביבה של X, שזרה לקבוצה A, ולכן $x \notin \overline{A}$, בסתירה. ■

דוגמא אם X קבוצה אינסופית עם טופולוגיה קו סופית (כל קבוצה שהמשלים שלה סופי פתוחה), אזי כל תת קבוצה פתוחה צפופה - ניקח קבוצה פתוחה U ועוד קבוצה פתוחה V, ונרצה להראות שהחיתוך אינו ריק, אבל

$$(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$$

וזה סופי, ולכן לא כל X.

לבסוף, יש לנו הסבר על תורת הקטגוריות. זה דורש המון ציורים, ודיאגרמות מתחלפות, ונועד בעיקר לאינטואיציה לא פורמלית, כלשון המתרגל.