טופולוגיה

ⓒ ארזים

7 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 שתי מטריקות d_1, d_2 על המרחב X נקראות שקולות אם $U \subseteq (X, d_1)$ פתוחה אם ורק אם $U \subseteq (X, d_2)$ פתוחה.

טענה 0.2 נניח שקיימים $c, C > 0$ כל שלכל $x, y \in X$ מתקיים

$$cd_1(x,y) \le d_2(x,y) \le Cd_1(x,y)$$

אזי d_1, d_2 שקולות.

הוכחה: תהא $U \subseteq (X, d_1)$ פתוחה, ויהי $x \in U$. לכן קיים $r > 0$ כך שמתקיים $B_r^{d_1}(x) \subseteq U$. נראה כי קיים $r' > 0$ עבורו $B_{r'}^{d_2}(x) \subseteq B_r^{d_1}(x)$. תהי $y \in B_{r'}^{d_2}(x)$, אזי

$$\begin{aligned} cd_1(x,y) &\le d_2(x,y) \le r' \\ d_1(x,y) &\le \frac{r'}{c} = r \end{aligned}$$

בחרנו $r' = rc$. הראינו כי U פתוחה לפי d_2. כעת, מסימטריות התנאי, נובע הכיוון השני:

$$\frac{1}{C} d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \frac{1}{c} d(x,y)$$

■

הגדרה 0.3 יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $A \subseteq X$, $x \in X$. נגדיר

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, A)$$

טענה 0.4 .1

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

2. אם A סגורה,

$$d(x,A)=0 \iff x\in A$$

הוכחה:

1. נקח $z\in A$, $\varepsilon>0$ כך שמתקיים

$$d(y,A)+\varepsilon>d(y,z)$$

אזי מתקיים

$$d(x,A)-d(y,A)\leq d(x,z)-d(y,z)+\varepsilon\leq d(x,y)+\varepsilon$$

וזאת לכל $\varepsilon>0$, לכן

$$d(x,A)-d(y,A)\leq d(x,y)$$

את אי השוויון השני ניתן לראות בצורה סימטרית.

2. נניח כי A סגורה. אם $x\in A$ אזי $d(x,A)=0$ מההגדרה. כעת נניח כי $d(x,A)=0$ וכן כי $x\notin A$. אז יש $r>0$ כך שמתקיים $B_r(x)\subseteq X\backslash A$. מצד שני יש $y\in A$ כך שמתקיים $d(x,y)<r$, וזו סתירה.

■

הגדרה 0.5 זוג (X,Ω) כאשר $\Omega\subseteq 2^X$ נקרא מרחב טופולוגי אם מתקיימים הבאים:

1. לכל $U_i\in\Omega$ מתקיים $\bigcup U_i\in\Omega$.
2. לכל $U_1,\ldots,U_n\in\Omega$ מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\Omega$$

3. $X,\emptyset\in\Omega$.

הגדרה 0.6 קבוצה $A\in\Omega$ נקראת <u>פתוחה</u>. קבוצה B עבורה $X\backslash B\in\Omega$ נקראת <u>סגורה</u>.

הגדרה 0.7 יהי (X,Ω) מרחב טופולוגי. Ω נקראת <u>מטריזבילית</u> אם קיימת מטריקה d על X כל שקבוצת הקבוצות הפתוחות לפי d היא בדיוק Ω. במצב זה אומרים כי d <u>משרה</u> את Ω.

דוגמאות

1. הטופולוגיה הדיסקרטית - כל הקבוצות פתוחות - $\Omega = 2^X$. טופולוגיה זו מושרית מהמטריקה הדיסקרטית.
2. X קבוצה, $\Omega = \{X, \emptyset\}$.
3. נגדיר $X = \mathbb{R} \cup \{0'\}$. קבוצות של Ω הן קבוצות מהצורה $V \cup \{0'\}$ אם $V \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עבורה $0 \in V$, או $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עבורה $0 \notin U$.

טענה 0.8 הדוגמא האחרונה היא של טופולוגיה לא מטריזבילית, והטופולוגיה $\Omega = \{\emptyset, X\}$ אינה מטריזבילית אם $|X| \geq 2$.

הוכחה: נתחיל מהחלק השני. נניח כי d משרה את Ω הזו. נקח $x, y \in X$ שונים, ונקבל $d(x,y) = r > 0$. אזי $B_{\frac{r}{2}}(x)$ היא קבוצה פתוחה שאינה X או $\emptyset$.
בחלק הראשון, שוב נניח כי d משרה את Ω הזו. אזי $d(0,0') = r > 0$. אזי $B_{\frac{r}{2}}(0) \subseteq X$ פתוחה, שמכילה את 0 ולא את $0'$. זה לא ייתכן לפי הבנייה, בסתירה. ■

הגדרה 0.9 קבוצה $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ נקראת בסיס אם Ω שמוגדרת להיות כל האיחודים של קבוצות מתוך B היא טופולוגיה.

טענה 0.10 $\mathcal{B}$ בסיס אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1.
$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

2. לכל $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, החיתוך $B_1 \cap B_2$ הוא איחוד של קבוצות מתוך B.

דוגמאות במרחב מטרי (X,d), אוסף כל הכדורים הפתוחים הם בסיס לטופולוגיה המטרית. למשל, אוסף כל הדיסקים הפתוחים במישור, אוסף כל הריבועים הפתוחים שצלעותיהם מקבילות לצירים, ואוסף כל הריבועים שצלעותיהם בזווית $\frac{\pi}{4}$ עם הצירים, כל אחד בפני עצמו הוא בסיס (כדורים פתוחים לפי מטריקות p).