<u>טופולוגיה</u>

© ארזים

31 באוקטובר 2016

בתורת הקבוצות דיברנו על קטגוריית הקבוצות Sets: האובייקטים הם קבוצות, והחיצים הם פונקציות.

באלגברה לינארית למדנו על קטגוריית המרחבים הווקטוריים Vect: האובייקטים הם מרחבים ווקטוריים, והחיצים הם העתקות לינאריות.

בקורס שלנו נדבר על הקטגוריה Top: האובייקטים הם מרחבים טופולוגיים, והחיצים ביניהם הם העתקות רציפות.

לא נרחיב על קטגוריות, אפשר לקרוא לשם הרחבה.

בתור התחלה נדבר על מרחבים מטריים.

(ראינו כמה הדגמות על טבעת מוביוס, מה קורה כשחותכים אותה באמצע, או בשליש דרך, כמה ציורים ואינטואיציות. כוחי מוגבל).

1 מרחבים מטריים

הגדרה 1.1 <u>מרחב מטרי</u> הוא זוג (X,d), באשר X קבוצה, וכן

$$d:X\times X\to\mathbb{R}_{\geq0}$$

המקיימת את התכונות הבאות:

1. $\forall x,y\in X\ \ d\left(x,y\right)=0\iff x=y$
2. $\forall x,y\in X\ \ d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
3. $\forall x,y,z\in X\ \ d\left(x,y\right)\leq d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$

הגדרה 1.2 יהיו $\left(X,d_{x}\right),\left(Y,d_{y}\right)$ מרחבים מטריים.

- סדרה $\left(x_{n}\right)\subseteq X$ <u>מתכנסת</u> לגבול $x\in X$ אם:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N\ \ d_{x}\left(x_{n},x\right)<\varepsilon$$

- $f:x\to y$ <u>רציפה</u> בנקודה $x_{0}\in X$ אם:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0.d_{x}\left(x_{0},x\right)<\delta\Rightarrow d_{y}\left(f\left(x_{0}\right),f\left(x\right)\right)<\varepsilon$$

דוגמאות

- $\mathbb{R}$ עם $d\left(x,y\right)=\left|x-y\right|$
- $\mathbb{R}^n$ עם

$$d\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2}$$

- $\mathbb{R}^n$ עם

$$d_\infty\left(x,y\right)=\max_i\left|x_i-y_i\right|$$

- תהא X קבוצה, ונגדיר

$$d\left(x,y\right)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

  - **תרגיל** אם $x_n\to x$ אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $x_n=x$.
הוכחה: אם x_n מתכנסת אל x, החל משלב מסויים המרחק ביניהן קטן מאשר $\frac{1}{2}$ - ולכן הוא 0, כלומר $x_n=x$. ■
  - **תרגיל** יהי $\left(Y,d_y\right)$ מרחב מטרי. אזי כל $f:X\to Y$ רציפה.
הוכחה: יהי $x_0\in X$ ויהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{1}{2}$.

$$d\left(x,x_0\right)<\delta\Rightarrow x=x_0\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\Rightarrow d_y\left(f\left(x\right),f\left(x_0\right)\right)=0<\varepsilon$$

■

- $X=C_0\left(\left[0,1\right]\to\mathbb{R}\right)=\left\{f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}\mid\exists M\quad\left|f\right|\leq M\right\}$, עם המטריקה

$$d\left(f,g\right)=\sup_{x\in\left[0,1\right]}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|$$

לגבי מטריקה זו נוכיח את אי שוויון המשולש: יהיו $f,g,h\in X$. ניקח $x\in\left[0,1\right]$ וכן $\varepsilon>0$ מתאים עבורו

$$d\left(f,g\right)-\varepsilon<\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|$$

כלומר,

$$\begin{aligned}d\left(f,g\right) &< \varepsilon+\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\varepsilon+\left|f\left(x\right)-h\left(x\right)\right|+\left|h\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\\ &\leq \varepsilon+d\left(f,h\right)+d\left(h,g\right)\end{aligned}$$

בסך הכל, לכל $\varepsilon > 0$,

$$d(f,g) < \varepsilon + d(f,h) + d(h,g)$$

ולכן קיבלנו את אי שוויון המשולש.