טופולוגיה

ⓒ ארזים

30 בנובמבר 2016

1 קשירות

בשיעור שעבר ראינו את ההגדרה של קבוצה קשירה - קבוצה שלא ניתן להציג כאיחוד זר של קבוצות פתוחות לא ריקות. ראינו שזה שקול לאותה הגדרה עם קבוצות סגורות. זה שקול גם לכך שכל תת קבוצה פתוחה וסגורה בטופולוגיה המושרית היא כל הקבוצה או הריקה.
ראינו שעבור $X=\mathbb{R}$, הקבוצות הקשירות הן קטעים מוכללים.

משפט 1.1 (למת הכוכב) אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קבוצות קשירות וקיימת A_β כך שלכל $\alpha\in I$ מתקיים

$$A_\beta\cap A_\alpha\neq\emptyset$$

אזי $\bigcup A_\alpha$ קשירה.

טענה 1.2 אם $A\subseteq X$ קשירה אזי גם $\overline{A}\subseteq X$ קשירה.

הוכחה: נניח כי $\overline{A}=C\cup D$ עבור C,D סגורות וזרות. היות ומתקיים $A\subseteq\overline{A}$, חייב להתקיים $A\cap C\neq\emptyset$ או $A\cap D\neq\emptyset$. בלי הגבלת הכלליות הראשון נכון. אזי $A\subseteq C$ בהכרח, כי אחרת $A=(C\cap A)\cup(D\cap A)$, בסתירה לקשירות. לפיכך $\overline{A}\subseteq C$, כי C סגורה, ולכן $D=\emptyset$, והוכחנו כי $\overline{A}$ קשירה. ■

טענה 1.3 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הם מרחבים טופולוגיים קשירים אם ורק אם $\prod X_\alpha$ קשירה עם טופולוגיית המכפלה.

הוכחה: אם יש β עבורו $X_\beta=U\cup V$, כאשר U,V פתוחות, זרות ולא ריקות, אזי

$$\prod X_\alpha=\pi_\beta^{-1}(U)\cup\pi_\beta^{-1}(V)$$

וזה מוכיח את הכיוון הראשון.
עבור הכיוון השני, נתחיל ממכפלת שני מרחבים טופולוגיים.
יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים קשירים ונניח בשלילה כי $X\times Y$ אינו קשיר. אזי קיימת $f:X\times Y\to\{0,1\}$ רציפה ולא קבועה, כלומר יש $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ עבורן

$$f(x_0,y_0)=0,f(x_1,y_1)=1$$

נסמן $X' = X \times \{y_1\}$, $Y' = \{x_0\} \times Y$. ברור כי X, X' הומיאומורפיים על ידי $x \mapsto (x, y_1)$, ובאותה צורה Y, Y' הומיאומורפיים. לכן Y', X' קשירים, ולכן כל פונקציה רציפה מהם אל $\{0,1\}$ היא קבועה. נשים לב כי $(x_0, y_1) \in X' \cap Y'$, והפונקציה

$$f\mid_{X'} : X' \to \{0,1\}$$

היא רציפה. לכן היא בהכרח קבועה, והיות ומתקיים $(x_1, y_1) \in X'$, f קבועה על 1. מאותה סיבה, f על Y' קבועה על 0, אבל ראינו שיש נקודה בחיתוך, בסתירה.

באינדוקציה אם כמות סופית של מרחב טופולוגיים הם קשירים, גם המכפלה שלהם קשירה. עתה נניח כי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ מרחבים טופולוגיים קשירים. יהי $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod X_\alpha$, ולכל $J \subseteq I$ סופית נגדיר

$$X_J = \prod_{i \in J} X_i \times \prod_{\alpha \in I \setminus J} \{x_\alpha\}$$

אזי כמובן X_J הומיאומורפית למכפלה

$$\prod_{i \in J} X_i$$

על ידי ההעתקה

$$(y_\alpha)_{\alpha \in J} \to (y_\alpha)_{\alpha \in J} \times \prod_{\alpha \in I \setminus J} \{x_\alpha\}$$

לכן X_J קשיר לכל J סופית. כמו כן, ברור כי כל X_J מכיל את הנקודה x, ולכן מלמת הכוכב נקבל שאיחודם קשיר. נשים לב שהאיחוד הזה הוא קבוצה צפופה במכפלה, כי היא נחתכת עם כל קבוצת בסיס. כיוון שהיא קשירה, גם הסגור שלה קשיר, ולכן כל המכפלה קשירה. ■

דוגמאות

1. $\mathbb{R}^n$ קשיר לכל n.
2. המרחב $X = \{0\} \times [0,1] \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid 0 < |x| < 1 \right\}$. נוכיח קשירות. נכתוב $X_1 = \{0\} \times [0,1]$, $X_2 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid x \in (0,1) \right\}$, $X_3 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid x \in (-1,0) \right\}$. שלושת אלה קשירים, ומתקיים $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, ושהן זרות. כעת $\overline{X_2} = X_2 \cup X_1$, ולכן $X_2 \cup X_1$ קשיר. כך נובע גם כי $X_3 \cup X_1$ קשיר. לכן מלמת הכוכב X קשיר.

הערה 1.4 בהינתן $x \in X$, מלמת הכוכב, איחוד כל הקבוצות הקשירות המכילות את X היא גם קבוצה קשירה.

הגדרה 1.5 נקרא לאיחוד כל הקבוצות הקשירות שמכילות את X <u>רכיב הקשירות</u> של x. קבוצה זו תמיד קשירה - וסגורה, כי הסגור שלה קשיר ומכיל את x, ולכן משתתף באיחוד.

נאמר $x\sim y$ אם יש קבוצה קשירה שמכילה את שניהם. זוהי שקילות בגלל למת הכוכב. נשים לב שרכיב קשירת תמיד אינו ריק כי כל יחידון הוא קשיר.

דוגמאות

1. $[a,b]\cup(c,d)$ עבור $a<b<c<d$. יש שני רכיבי קשירות - $[a,b],(c,d)$.
2. $\mathbb{Q}$ - רכיבי הקשירות הם בדיוק כל היחידונים.

1.1 קשירות מקומית

הגדרה 1.6 יהי X מרחב טופולוגי. נאמר כי X קשיר מקומית בנקודה $x\in X$ אם לכל סביבה W של x קיימת V פתוחה וקשירה כך שמתקיים $x\in V\subseteq W$. אם X קשיר מקומית בנקודה x לכל $x\in X$, נאמר כי X קשיר מקומית.

דוגמאות

1. $[a,b]\cup(c,d]$ - לא קשיר, אבל קשיר מקומית.
2. המרחב $\mathbb{R}^2\supseteq X=(\{0\}\times[0,1])\cup([0,1]\times\{0\})\cup\left(\bigcup_n\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]\right)$. מרחב זה קשיר כי כל הקבוצות נחתכות עם "בסיס המסרק" (הקבוצה השנייה באיחוד). מרחב זה אינו קשיר מקומית בנקודה $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, כי כל כדור ברדיוס לכל היותר $\frac{1}{3}$ נחתך עם X בקבוצה לא קשירה.

1.2 קשירות מסילתית

הגדרה 1.7 יהי X מרחב טופולוגי. פונקציה רציפה $\alpha:[a,b]\to X$ נקראת מסילה.

הגדרה 1.8 אם מסילה $\alpha:[a,b]\to X$ מקיימת $\alpha(a)=p,\alpha(b)=q$, נאמר כי α מחברת בין p,q.

הגדרה 1.9 מרחב X נקרא קשיר מסילתית אם לכל 2 נקודות יש מסילה המחברת אותם.

הגדרה 1.10 נאמר כי $x\sim y$ אם ורק אם קיימת מסילה המחברת x,y. זהו יחס שקילות, ולכן מוגדר גם רכיב קשירות מסילתית של $x\in X$.

הגדרה 1.11 X קשיר מסילתית מקומית בנקודה $x\in X$ אם לכל סביבה W של x יש קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית V כך שמתקיים $x\in V\subseteq W$.

אם X קשיר מסילתית מקומית בכל נקודה $x\in X$ נאמר כי X קשיר מסילתית מקומית.

טענה 1.12 אם X קשיר מסילתית אזי הוא קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה כי X לא קשיר. אז יש פונקציה $f:X\to\{0,1\}$ שאינה קבועה, ואז יש x,y כך שמתקיים $f(x)=0,f(y)=1$. כעת, מקשירות מסילתית, יש מסילה $\alpha:[a,b]\to X$ עבורה $\alpha(a)=x,\alpha(b)=y$, ולכן $f\circ\alpha:[a,b]\to\{0,1\}$ היא העתקה לא קבועה ורציפה - בסתירה לכך שהקטע $[a,b]$ הוא קשיר. $\blacksquare$

טענה 1.13 אם X קשיר מסילתית, $f:X\to Y$ רציפה, אזי $f(X)$ קשירה מסילתית.

הוכחה: אם $f(p), f(q) \in f(X)$, מההנחה, יש מסילה α המחברת בין p, q, ולכן $f \circ \alpha$ מסילה שמחברת את $f(p), f(q)$. ■

מסקנה 1.14 קשירות מסילתית נשמרת תחת הומיאומורפיזם.

טענה 1.15 מכפלה כלשהי של מרחבים טופולוגיים עם טופולוגיית המכפלה היא קשירה מסילתית אם ורק אם כל מרחב קשיר מסילתית.

הוכחה: אם המכפלה קשירה מסילתית, $p, q \in X_\beta$, אז יש $x = (x_\alpha) \in \prod X_\alpha, y = (y_\alpha) \in \prod X_\alpha$, כך שמתקיים $x_\beta = p, y_\beta = q$, ויש מסילה α שמחברת את x, y - אזי $\pi_\beta \circ \alpha$ היא מסילה שמחברת את p, q.

כעת נניח שכל מרחב הוא קשיר מסילתית. תהיינה $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha)$ נקודות במכפלה. לכל α קיימת מסילה γ_α המחברת בין x_α, y_α במרחב X_α. ניקח את המסילה

$$\gamma(t) = \prod_\alpha \gamma_\alpha(t)$$

וזו בבירור מסילה המחברת את x, y. ■

טענה 1.16 אם X קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי X קשיר מסילתית.

הוכחה: לכל $x \in X$, המרחב X הוא סביבה של x, ומהגדרת קשירות מסילתית מקומית, נסמן U_x להיות קבוצה פתוחה קשירה מסילתית המכילה את x.

עבור $y \in X$ נגדיר את A להיות רכיב הקשירות המסילתית של y. כמובן שלכל $a \in A$ מתקיים $U_a \subseteq A$. לכן בהכרח A קבוצה פתוחה. נשים לב כי

$$X \backslash A = \bigcup_{x \in X \backslash A} U_x$$

שכן לכל $x \notin A$ מתקיים $U_x \cap A = \emptyset$. לכן A קבוצה פתוחה וסגורה, אבל X קשיר, ולכן היא חייבת להיות טריוויאלית - אבל היא לא ריקה, שכן $y \in A$, ולכן $A = X$, כלומר X קשיר מסילתית. ■

דוגמאות

1. קשירות מסילתית מקומית לא גוררת קשירות מסילתית - איחוד שני קטעים זרים למשל.

2. קשירות מסילתית לא גוררת קשירות מסילתית מקומית - המסרק שראינו קודם.

3. קשירות לא גוררת קשירות מסילתית: ניקח $X = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \mid 0 < x \leq 1\right\} \cup (\{0\} \times [0,1])$. X היא הסגור של המאוחד הראשון, ולכן קשירה, כי המאוחד עצמו קשיר, כתמונה של קטע תחת פונקציה רציפה. נראה כי אין מסילה המחברת את $(0,0)$עם $\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$. אם הייתה כזו מסילה $\alpha : [0,1] \to X$ עוברה $\alpha(0) = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right), \alpha(1) =$

$(0,0)$. נסמן $\alpha(t)=(\beta(t),\gamma(t))$, וברור כי β,γ רציפות, כך שמתקיים $\beta(0)=\frac{1}{\pi},\beta(1)=0$. אזי יש סדרה $t_n\in[0,1]$ עבור $n\geq1$ עולה כך שמתקיים

$$\beta(t_n)=\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

לכן בהכרח $\gamma(t_n)$ מתכנסת, שכן $t_n\to t$ מתכנסת כסדרה חסומה ומונוטונית. אבל, מתקיים $\sin\frac{1}{\beta(t_n)}=\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=(-1)^n$, ולכן $\alpha(t)$ אינה מתכנסת, בסתירה לרציפות.

טענה 1.17 יהי $n>1$. אזי אין הומיאומורפיזם בין $\mathbb{R},\mathbb{R}^n$.

הוכחה: נניח כי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הומיאומורפיזם, נביט בצמצום $g=f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$, שהוא רציף ועל $\mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$. עם זאת, המרחב $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ קשיר מסילתית, אך $\mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$ אינו קשיר מסילתית, בסתירה. ■

2 קומפקטיות

הגדרה 2.1 נאמר כי אוסף קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X אם $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$.

הגדרה 2.2 מרחב טופולוגי X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי פתוח סופי.

הגדרה 2.3 $X_0\subseteq X$ היא קבוצה קומפקטית אם המרחב הטופולוגי המושרה הוא קומפקטי.

דוגמאות

1. $\mathbb{R}$ אינו קומפקטי, כי לכיסוי $U_n=(n,n+2)$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ אין תת כיסוי סופי.
2. הקטע $(0,1)$גם כן אינו קומפקטי כי לכיסוי $U_n=\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$ לכל $n\geq2$ אין תת כיסוי סופי.

הגדרה 2.4 נאמר שלאוסף קבוצות סגורות $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ יש את <u>תכונת החיתוך הסופית</u> אם ורק אם כל חיתוך תת־אוסף סופי אינו ריק.

טענה 2.5 מרחב טופולוגי X קומפקטי אם ורק אם כל אוסף קבוצות סגורות המקיים את תכונת החיתוך הסופי מקיים גם שחיתוך כל הקבוצות באוסף אינו ריק.

הוכחה: נניח כי X קומפקטי, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$סגורות עם תכונת החיתוך הסופי. נניח בשלילה כי חיתוך כל האוסף ריק. לכן

$$X=X\setminus\bigcap_{\alpha\in I}V_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(X\setminus V_\alpha)$$

לכן $X\backslash V_\alpha$ נותנות כיסוי פתוח של X, ולכן יש לו תת כיסוי סופי $\{X\backslash V_i\}_{i=1}^n$, ואז

$$X=\bigcup_{i=1}^n X\backslash V_i = X\backslash \bigcap_{i=1}^n V_i$$

בסתירה לתכונת החיתוך הסופי של $\{V_\alpha\}$.

נניח כי התנאי בטענה מתקיים, ויהי $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של X. אם לא היה תת כיסוי סופי, אז לכל תת אוסף סופי $U_1,\ldots,U_n$ מתקיים

$$\bigcap_{i=1}^n (X\backslash U_i) = X\backslash \bigcup_{i=1}^n U_i \neq \emptyset$$

לכן $X\backslash U_i$ כולן סגורות ויש להן את תכונת החיתוך הסופי, כלומר החיתוך של כולן מכיל נקודה x.

$$x\in \bigcap_\alpha X\backslash U_\alpha = X\backslash \bigcup_\alpha U_\alpha$$

בסתירה לכך שלקחנו את U_α להיות כיסוי. ■

דוגמא $F_t=(-\infty,t]$ הן קבוצות סגורות המקיימות את תכונת החיתוך הסופי, שכן

$$F_{t_1}\cap F_{t_2}\cap\ldots\cap F_{t_n} = \left(-\infty, \min_{1\le i\le n}\{t_i\}\right)\neq\emptyset$$

אבל כמובן

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} (-\infty,t]=\emptyset$$

טענה 2.6 אם $f:X\to Y$ רציפה, X מרחב טופולוגי קומפקטי, אזי $f(X)$ קומפקטי.

הוכחה: יהיו $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של $f(X)$. אזי $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}$ כיסוי פתוח של X, ולכן מקומפקטיות x קיים לו תת כיסוי סופי $\left\{f^{-1}(U_i)\right\}_{i=1}^n$, כלומר $\{U_i\}_{i=1}^n$ תת כיסוי סופי של $f(X)$. ■

טענה 2.7 קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית.

הוכחה: יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי, תהי $A\subseteq X$ סגורה, ויהי $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של A. אזי $U_\alpha=W_\alpha\cap A$, כאשר W_α פתוחות בתוך X. לכן $\{W_\alpha\}\cup\{X\backslash A\}$ הוא כיסוי פתוח של X, כלומר יש לו תת כיסוי סופי: $W_1,\ldots,W_n$ ואולי $X\backslash A$. אזי $U_i=W_i\cap A$ הן תת כיסוי סופי של A. ■

דוגמא לא כל קבוצה קומפקטית היא סגורה. למשל, עבור $X=\{a,b\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית, הקבוצה $\{a\}$ היא קומפקטית ולא סגורה.