טופולוגיה

ⓒ ארזים

23 בנובמבר 2016

1 אקסיומות המניה

הגדרה 1.1 יהי X מרחב טופולוגי, ויהי $x\in X$. אוסף קובוצות פתוחות $\{U_i\}_{i\in I}$ נקרא בסיס לפתוחות של x אם לכל קבוצה פתוחה V המכילה את x, קיים i כך שמתקיים $x\in U_i\subseteq V$.

אקסיומת המניה הראשונה X מקיים את אקסיומת המנייה הראשונה אם לכל נקודה $x\in X$ יש בסיס בן מניה לפתוחות של X.

אקסיומת המניה השנייה X מקיים את אקסיומת המנייה השנייה אם קיים בסיס בן מניה היוצר את הטופולוגיה.

הגדרה 1.2 מרחב טופולוגי X נקרא ספרבילי אם יש תת קבוצה צפופה של X שהיא בת מניה.

טענה 1.3 אקסיומת המניה השנייה גוררת ספרביליות.

הוכחה: נניח X מקיים את אקסיומת המנייה השנייה. יהיו $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בין מניה, וניקח $x_i\in U_i$. אזי $\{x_i\}$ צפופה בתוך X, שכן אם U פתוחה אזי יש i כך שמתקיים $x_i\in U_i\subseteq U$. ■

דוגמאות

1. כל מרחב מטרי מקיים את אקסיומת המנייה הראשונה - ניקח את $\{B_r(x)\mid r\in\mathbb{Q}_+\}$, וזהו בסיס לפתוחות של x.
2. $\mathbb{R}^n$ מקיים את אקסיומת המניה השנייה, על ידי הבסיס $\{B_r(x)\mid x\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}_+\}$.
3. $l_2(\mathbb{R})=\left\{(x_i)_{i=1}^{\infty}\mid x_i\in\mathbb{R},\sum x_i^2<\infty\right\}$ עם מטריקת d_2 - מרחב זה מקיים את אקסיומת המניה השנייה.
4. $l_\infty(\mathbb{R})=\{(x_i)_{i=1}^{\infty}\mid x_i\in\mathbb{R},\sup_i|x_i|<\infty\}$ עם מטריקת d_∞ - מרחב זה אינו ספרבילי: לכל $F\subseteq\mathbb{N}$ נגדיר $x_F\in l_\infty(\mathbb{R})$ על ידי

$$x_F(n)=\begin{cases}1 & n\in F\\ 0 & n\notin F\end{cases}$$

אם $F_1,F_2\subseteq\mathbb{N}$, אז אם $F_1\neq F_2$ יש בלי הגבלת הכלליות $i\in F_2\backslash F_1$, ולכן

$x_{F_2}(i)=1$, $x_{F_1}(i)=0$. בפרט $\{x_F\}$ אינה בת מניה, וכן $d(x_{F_1},x_{F_2})=1$.
אם הייתה קבוצה צפופה $\{y_i\}\subseteq l_\infty(\mathbb{R})$, אזי $\bigcup B_{\frac{1}{4}}(y_i)=l_\infty(\mathbb{R})$, אחרת יש x שלא באיחוד הזה, ואז $B_{\frac{1}{4}}(x)$ לא חותך את $\{y_i\}$ בסתירה לצפיפות של y_i.
אם היא הייתה בת מניה, בנינו קבוצה לא בת מניה $\{x_F\}$ כך שהמרחק בין כל שתי נקודות בה הוא 1. לכן בכל כדור ברדיוס $\frac{1}{4}$ יש לכל היותר איבר יחיד מתוך $\{x_F\}$, וזו סתירה.

טענה 1.4 מרחב רגולרי המקיים את אקסיומת המניה השנייה הוא נורמלי.

הוכחה: תהיינה A,B קבוצות סגורות זרות, ויהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה. לכל $a\in A$ מקתיים $a\in X\backslash B$, ולכן יש U_a פתוחה כך שמתקיים $a\in U_a\subseteq\overline{U_a}\subseteq X\backslash B$. לכן יש $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ כיסוי של A, עם $\overline{U_i}\cap B=\emptyset$, וכמו כן יש $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ כיסוי של B, עם $\overline{V_i}\cap A=\emptyset$. כעת נגדיר

$$S_k=U_k\backslash\bigcup_{i=1}^{k}\overline{V_i},T_k=V_k\backslash\bigcup_{i=1}^{k}\overline{U_i}$$

T_k,S_k פתוחות, ולכן גם

$$O=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k,P=\bigcup_{k=1}^{\infty}T_k$$

גם כן פתוחות. כיוון שמתקיים $A\subseteq\bigcup U_i$ וכן $\overline{V_i}\cap A=\emptyset$, מתקיים $A\subseteq O$. באותה צורה $B\subseteq P$.
כעת כמובן O,P זרות, כיוון שאחרת יש n,m כך שמתקיים $T_n\cap S_m\neq\emptyset$. אם $n\geq m$ לא יכול להיות $T_n\cap S_m\neq\emptyset$, ואותו הדבר אם $m\geq n$. ■

1.1 משפט המטריזציה של אוריסון

הגדרה 1.5 מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא <u>מטריזבילי</u> אם יש מטריקה על X המשרה את τ.

הערה 1.6 אם (X,τ) הוא מטריזבילי אזי כל תת מרחב (כלומר תת קבוצה עם הטופולוגיה המושרה) הוא גם מטריזבילי.

הערה 1.7 (תרגיל) $[0,1]^{\mathbb{N}}$ עם טופולוגיית המכפלה הוא מרחב מטריזבילי, על ידי המטריקה

$$d\left((x_i)_{i=1}^{\infty},(y_i)_{i=1}^{\infty}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i}$$

משפט 1.8 משפט (משפט המטריזציה של אוריסון) אם X מרחב T_3 ומקיים את אקסיומת המנייה השנייה, אזי X מטריזבילי.

הוכחה: נראה שבתנאים אלה X הומאומורפי לתת קבוצה E של $[0,1]^{\mathbb{N}}$ עם טופולוגיית המכפלה. אכן, אם $f: X \to E$ הוא כזה הומיאומורפיזם, הרי E מטריזבילי , ולכן

$$d_X(x,y) = d_E(f(x), f(y))$$

היא מטריקה על X המשרה את הטופולוגיה.

יהי B בסיס בן מניה של X. לכל זוג קבוצות U,V בבסיס המקיימות $\overline{U} \subseteq V$ מתקיים $\overline{U}, X\backslash V$ קבוצות סגורות וזרות. מהלמה של אוריסון, יש $f: X \to [0,1]$ רציפה כך שמתקיים $f(\overline{U}) = 0, f(X\backslash V) = 1$. קיבלנו אוסף בן מניה של פונקציות רציפות $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} F: X &\to [0,1]^{\mathbb{N}} \\ F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots) \end{aligned}$$

טענה 1.9 לכל $x \in X$ ולכל C סגורה כך שמתקיים $x \notin C$ קיים n כך שמתקיים $f_n(C) = 1$, $f_n(x) = 0$.

הוכחה: $x \in X\backslash C$, שהיא פתוחה, וכן X הוא T_3. לכן יש V_1 פתוחה בבסיס כך שמתקיים $x \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq X\backslash C$. X הוא T_3, ולכן קיימת V_2 בבסיס עבורה

$$x \in V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq X\backslash C$$

כעת V_1, V_2 בבסיס, $\overline{V_2} \subseteq V_1$, ולכן קיים n מתאים. ■

כעת נוכיח כי F הומיאומורפיזם.

חד־חד־ערכיות: יהיו $x \neq y$. לפי הטענה (היות והסינגלטונים הם קבוצות סגורות), יש n כך שמתקיים $f_n(x) = 0, f_n(y) = 1$, ולכן $F(x) \neq F(y)$.

רציפות: ניקח איבר תת בסיס עבור $V = U \times [0,1] \times [0,1] \times \dots$, עבור $U \subseteq [0,1]$ פתוחה, אזי $F^{-1}(V)$ היא למעשה $f_1^{-1}(U)$, ומרציפות f_1 זו קבוצה פתוחה.

רציפות ההופכית: למעשה צריך להראות כי אם U פתוחה בתוך X, אזי $F(U)$ פתוחה בתוך $F(X)$. כלומר צריך להראות כי יש V פתוחה בתוך $[0,1]^{\mathbb{N}}$ כך שמתקיים $F(U) = F(X) \cap V$. נסמן $\pi_1: [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ ההטלה על הקואורדינטה i. אזי כמובן $f_i = \pi_i \circ F$, ולכן $f^{-1}(O) = F^{-1}(\pi_i^{-1}(O))$ לכל $O \subseteq [0,1]$. כעת, תהי U פתוחה בתוך X. יהי $x \in U$. מהטענה, יש $n(x)$ כך שמתקיים $f_{n(x)} = 0, f_{n(x)}(X\backslash U) = 1$. לכן מתקיים

$$x \in f_{n(x)}^{-1}([0,1)) \subseteq U$$

ומכאן מתקיים

$$U = \bigcup_{x \in U} f_{n(x)}^{-1}([0,1)) = \bigcup_{x \in U} F^{-1}\left(\pi_{n(x)}^{-1}([0,1))\right)$$

לכן מתקיים

$$F\left(U\right)=\left(\bigcup_{x\in U}\pi_{n(x)}^{-1}\left(\left[0,1\right)\right)\right)\cap F\left(X\right)$$

זו קבוצה פתוחה מתוך $\left[0,1\right]^{\mathbb{N}}$ בחיתוך עם $F\left(X\right)$.
בסך הכל, סיימנו. ■

2 קשירות

הגדרה 2.1 מרחב טופולוגי X נקרא קשיר אם אין U,V לא ריקות, פתוחות וזרות כך שמתקיים $X=U\cup V$.
תת קבוצה $E\subseteq X$ היא קשירה אם המרחב הטופולוגי המושרה על E קשיר.

הערה 2.2 מרחב טופולוגי הוא קשיר אם ורק אם אין C,D לא ריקות, סגורות וזרות כך שמתקיים $X=C\cup D$.

טענה 2.3 מרחב טופולוגי X קשיר אם ורק אם לר קיימת $f:X\to\{0,1\}$, כאשר על $\{0,1\}$ יש את הטופולוגיה הדיסקרטית, שהיא רציפה ועל (כלומר לא קבועה).

הוכחה: אם יש כזו פונקציה אזי $X=f^{-1}\left(\{1\}\right)\cup f^{-1}\left(\{0\}\right)$ ולכן לא קשיר.
אם X לא קשיר, ונניח כי $X=U\cup V$ ניקח $f\mid_{V}=1,f\mid_{U}=0$. ■

דוגמאות

1. המרחב $[a,b]\cup[c,d]$ עבור $a<b<c<d$ לא קשיר.
2. $\mathbb{Q}$ לא קשירה: $\mathbb{Q}=\left(\left(-\infty,\pi\right)\cap\mathbb{Q}\right)\cup\left(\left(\pi,\infty\right)\right)$.

טענה 2.4 אם X קשיר וכן $f:X\to Y$ רציפה ועל, Y קשיר.

הוכחה: אחרת $Y=U\cup V$ ואז $X=f^{-1}\left(U\right)\cup f^{-1}\left(V\right)$. ■

מסקנה 2.5 קשירות נשמרת תחת הומיאומורפיזם.

תרגיל $\mathbb{R}$ אינו הומיאומורפי אל $\mathbb{R}^2$.

למחשבה האם $\mathbb{R}^2$ הומיאומורפי אל $\mathbb{R}^3$.

דוגמא $(0,1)$ אינו הומיאומורפי אל $[0,1)$, שכן אם היה הומיאומורפיזם כזה, אזי $(0,1)\setminus f\left(0\right)=\left(0,f\left(0\right)\right)\cup\left(f\left(0\right),1\right)=f\left(\left[0,1\right)\setminus\{0\}\right)$.

טענה 2.6 אם X מרחב טופולוגי לא קשיר וכן $X=U\cup V$, עם תת קבוצה $A\subseteq X$ תת קבוצה קשירה, אזי $A\subseteq U$ או $A\subseteq V$, אך לא שניהם.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות $A\cap U \neq \emptyset$. אם גם $V\cap A \neq \emptyset$ אזי $A=(U\cap A)\cup(V\cap A)$ סתירה לקשירות של A. ■

טענה 2.7 תת קבוצה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה הסטנדרטית היא קשירה אם ורק אם היא קטע במובן הרחב (קטע פתוח, סגור, חצי פתוח וחצי סגור, או קרן אינסופית פתוחה או סגורה).

הוכחה: נניח כי $A\subseteq\mathbb{R}$ קשירה, אזי לכל $a\neq b\in A$ עם $a<b$, אזי לכל $a<c<b$ מתקיים $c\in A$ - אחרת $A=((-\infty,c)\cap A)\cup((c,\infty)\cap A)$ סתירה לקשירות. לכן A היא הקטע שקצותיו הם $\inf_{a\in A}a, \sup_{a\in A}a$.

כעת נראה את הכיוון השני עבור הקטע הסגור: נכתוב $[a,b]=U\cup V$, כאשר U,V קבוצות לא ריקות, זרות ופתוחות. בלי הגבלת הכלליות מתקיים $a\in U$. נסמן $S=\{x\in[a,b] \mid [a,x]\subseteq X\}$. כעת נסמן $m=\sup S$. כעת $a<m$ (כי חייב להיות קטע שמוכל בתוך U, כי U פתוחה). כמו כן, $m\notin U$, כי אחרת רק יכול להיות $m=b$, ואז $V=\emptyset$. ■

משפט 2.8 (משפט ערך הביניים) אם X מרחב טופולוגי קשיר, עם פונקציה $f:X\to[0,1]$ רציפה, בהינתן $x,y\in X$ עם $f(x)<f(y)$, אזי לכל $f(x)<t<f(y)$ קיים $z\in X$ עבורו $f(z)=t$.

הוכחה: f רציפה, ועל תמונתה, ולכן כיוון שהמרחב X קשיר, גם $f(X)$ קשיר, ולכן קטע. ■

2.1 קשירות של איחוד ומכפלה

טענה 2.9 אם $A\subseteq X$ קשיר אז גם $\overline{A}$ קשיר.

הוכחה: אם $\overline{A}=C\cup D$, כאשר C,D סגורות וזרות, אז בלי הגבלת הכלליות $A\cap C\neq\emptyset$ ואז $A\subseteq C$, כלומר $D=\emptyset$ - כי אחרת $A=(C\cap A)\cup(D\cap A)$ בסתירה לקשירות A.■

טענה 2.10 (טענת הכוכב) אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קשירות ויש $\beta\in I$ כך שמתקיים לכל $\alpha\in I$, $A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset$, אזי $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ קשיר.

הוכחה: אם $\bigcup A_\alpha=U\cup V$ עבור U,V פתוחות וזרות, אזי $A_\beta\subseteq U$ בלי הגבלת הכלליות (בטוח מוכל באחת מהן). כיוון שמתקיים $A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset$, נובע כי $A_\alpha\subseteq U$ לכל $\alpha\in I$, ומכאן כי $V=\emptyset$. ■

טענה 2.11 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קשירים אם ורק אם $\prod X_\alpha$ קשיר עם טופולוגיית המכפלה.

הוכחה: אם יש β כך שמתקיים $X_\beta=U\cup V$ כאשר שתיהן פתוחות וזרות, אזי $\prod X_\alpha=\pi_\beta^{-1}(U)\cup\pi_\beta^{-1}(V)$.

המשך ההוכחה בשיעור הבא. ■