טופולוגיה

ⓒ ארזים

16 בנובמבר 2016

הערה 0.1 אם $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ מרחבים טופולוגיים המושרים ממטריקות d_1,d_2 בהתאמה, אזי מרחב המכפלה $X_1\times X_2$ (עם טופולוגיית המכפלה) גם מושרה ממטריקה. בדקו כי המטריקה

$$d\left(\left(x,y\right),\left(w,z\right)\right)=\max\left(d_1\left(x,w\right),d_2\left(y,z\right)\right)$$

משרה את טופולוגיית המכפלה.

תזכורת בהינתן X,Y מרחבים טופולוגיים, $f:X\to Y$ נקראת רציפה אם לכל U פתוחה בתוך Y, $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה בתוך X.

הגדרה 0.2 בהינתן מרחבים טופולוגיים X,Y, $f:X\to Y$ נקראת <u>הומיאומורפיזם</u> אם:

1. f חד־חד־ערכית ועל Y.
2. f רציפה.
3. f^{-1} רציפה.

כאשר קיימת f כזו נאמר כי X,Y הומיאומורפיים.

דוגמאות

1. המרחבים $\mathbb{R},\left(-1,1\right)$ הומיאומורפיים, על ידי ההעתקה

$$f\left(x\right)=\frac{x}{1-x^2}$$

כמו כן, לכל n מתקיים שהמרחב $\mathbb{R}^n$ הומיאומורפי למרחב $B_1\left(0\right)$.

2. הספירה במימד n, מסומנת $S^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ ומוגדרת

$$S^n=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\left|x\right|=1\right\}$$

בלי הקוטב הצפוני, הומיאומורפית למרחב $\mathbb{R}^2$: נגדיר

$$f:S^2\backslash\left(0,0,1\right)\to\mathbb{R}^2$$

להיות ההטלה הסטריאוגרפית, כלומר $s\in S^2\backslash\left(0,0,1\right)$ עוברת לנקודה במישור $\mathbb{R}^2$ שנחתכת עם הישר היחיד בין s לבין $\left(0,0,1\right)$. בדקו שזה הומיאומורפיזם.

3. נביט בהעתקה

$$g:[0,1]\cup(2,3]:[0,2]$$

המוגדרת על ידי

$$g\left(x\right)=\begin{cases}x & x\in[0,1]\\ x-1 & 2<x\leq3\end{cases}$$

העתקה זו רציפה, וההופכית שלה היא

$$g^{-1}\left(y\right)=\begin{cases}y & y\in[0,1]\\ y+1 & 1<y\leq2\end{cases}$$

שהיא כמובן לא רציפה.

1 הפרדה

יהי (x,τ) מרחב טופולוגי.

הגדרה 1.1 יהיו A,B קבוצות זרות. נאמר כי A,B ניתנות להפרדה אם קיימות קבוצות פתוחות U,V עבורן $A\subseteq U,B\subseteq V$, $U\cap V=\emptyset$.

זוג נקודות $x,y\in X$ ייקראו ניתנות להפרדה אם $\{x\},\{y\}$ ניתנות להפרדה.

כמו כן, נקודה $x\in X$ וקבוצה $A\in X$ ייקראו ניתנות להפרדה אם $A,\{x\}$ ניתנות להפרדה.

1.1 אקסיומות ההפרדה

האקסיומות:

אקסיומת T_0: לכל זוג נקודות שונות קיימת קבוצה פתוחה שמכילה אחת ולא את השנייה.

אקסיומת T_1: לכל זוג נקודות שונות קיימת קבוצה פתוחה שמכילה את הנקודה הראשונה ולא את השנייה, וקיימת קבוצה פתוחה שמכילה את השנייה ולא את הראשונה.

אקסיומת T_2 (האוסדורף): כל זוג נקודות שונות ניתנות להפרדה.

אקסיומת T_3: מתקיימת T_1 וכן תכונת הרגולריות: כל נקודה וכל קבוצה סגורה שלא מכילה אותה ניתנות להפרדה.

אקסיומת T_4: מתקיימת T_1 וכן תכונת הנורמליות: כל שתי קבוצות סגורות זרות ניתנות להפרדה.

הגדרה 1.2 יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. X ייקרא מרחב T_i אם האקסיומה T_i מתקיימת בו.

טענה 1.3 מרחב X הוא T_1 אם ורק אם כל נקודה $x\in X$ היא קבוצה סגורה.

הוכחה: נניח שכל נקודה היא קבוצה סגורה. יהיו $x, y \in X$. $\{x\}$ סגורה, ולכן $X \setminus \{x\}$ פתוחה ומכילה את y ולא את x. מאותו טיעון, $X \setminus \{y\}$ פתוחה ומכילה את x ולא את y. לכן X הוא T_1.

כעת נניח כי X הוא T_1. יהי $x \in X$. לכל $y \neq x$, לפי T_1, יש U_y פתוחה כך שמתקיים $y \in U_y, x \notin U_y$, ולכן $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ היא פתוחה. לכן $\{x\}$ סגורה. ■

הבחנה מתקיים $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. נראה כעת כי אין אף גרירה בכיוון השני.

1. מרחב שאינו T_0 - כל מרחב טופולוגי טריוויאלי עם יותר משתי נקודות.

2. מרחב T_0 שאינו T_1 - $X = \{a, b\}$, עם הטופלוגיה $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. בבירור T_0 מתקיים, אבל $\{a\}$ אינה סגורה, ולכן X אינו T_1.

3. מרחב T_1 שאינו T_2 - X קבוצה אינסופית כלשהי עם הטופלוגיה הקו־סופית: $\tau = \{U \subseteq X \mid |X \setminus U| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$. T_1 בבירור מתקיים, כי אם $x \neq y$, אזי $X \setminus \{x\}$ מכיל את y ולא את x, $X \setminus \{y\}$ מכיל את x ולא את y. T_2 לא מתקיים, כי אם U, V פתוחות ושתיהן לא ריקות, אזי $U \cap V \neq \emptyset$.

4. מרחב T_2 שאינו T_3 - ניקח $X = \mathbb{R}$, ונגדיר את הטופלוגיה לפי הבסיס:

$$A = \{(a, b) \mid a < b\} \cup \left\{ (a, b) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N} \right\} \mid a < b \right\}$$

זה אכן מרחב T_2, כי זו טופולוגיה חזקה יותר מהטופולוגיה הסטנדרטית, אבל לא T_3: הקבוצה $D = \left\{ \frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \mathbb{N} \right\}$ סגורה, כי

$$\mathbb{R} \setminus D = \bigcup_{a<b} (a, b) \setminus D$$

אבל D לא ניתנת להפרדה מהנקודה 0. נניח בשלילה שקיימות U, V פתוחות עבורן $U \cap V = \emptyset$, $0 \in U, D \subseteq V$. יש איבר בסיס שמכיל את 0 ומוכל בתוך U. כיוון שהוא זר לקבוצה D, הוא חייב להיות מן הצורה $(a_0, b_0) \setminus D$ עבור $a_0 < 0, b_0 > 0$. עבור m גדול מספיק, $0 \in \left(a_0, \frac{1}{m}\right) \setminus D$. כיוון שמתקיים $\frac{1}{2m} \in D$, בהכרח יש איבר בסיס מן הצורה (c, d) כך שמתקיים $\frac{1}{2m} \in (c, d) \subseteq V$. בבירור הקבוצות $\left(a_0, \frac{1}{m}\right) \setminus D, (c, d)$ אינן זרות, בסתירה.

5. מרחב T_3 שאינו T_4 - נצטרך עוד כמה כלים כדי להציג את הדוגמה. נחזור אליה בהמשך.

טענה 1.4 מרחב טופולוגי (X, τ) הוא רגולרי אם ורק אם לכל $x \in X$ ולכל $U \subseteq X$ פתוחה עבורה $x \in U$, קיימת $V \subseteq X$ פתוחה כך שמתקיים $X \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

הוכחה: אם המרחב רגולרי, בהינתן $x \in X$ וקבוצה פתוחה $U \subseteq X$ עבורה $x \in U$, הקבוצה $X \setminus U$ סגורה, ולכן x ניתנת להפרדה ממנה - קיימות V, V' פתוחות כך שמתקיים $x \in V$, $X \setminus U \subseteq V'$, וכן $V \cap V' = \emptyset$. לכן $V \cap (X \setminus U) = \emptyset$, כלומר $V \subseteq U$, וכן $X \setminus V'$ קבוצה סגורה שמכילה את V ומוכלת בתוך U, כלומר $V \subseteq X \setminus V' \subseteq U$, ולכן $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ כנדרש.

אם ההנחה מתקיימת, ההוכחה דומה מאוד - נשאיר כתרגיל. ■

טענה 1.5 מרחב טופולוגי (X,τ) הוא רגולרי אם ורק אם לכל קבוצה סגורה A ולכל קבוצה פתוחה U עבורה $A\subseteq U$, קיימת קבוצה פתוחה V כך שמתקיים $A\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U$.

הוכחה: ההוכחה כאן דומה לקודמת, וגם נשארת כתרגיל. ■

טענה 1.6 מרחב טופולוגי (X,τ) הוא האוסדורף אם ורק אם הקבוצה $\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}\subseteq X\times X$ היא סגורה בטופולוגיית המכפלה על $X\times X$.

הוכחה: נניח כי X האוסדורף, ונראה כי Δ^c פתוחה. תהי $(x,y)\in\Delta^c$, כלומר $x\neq y$, אזי מהאוסדורף קיימות קוצות פתוחות וזרות U,V עבורן $x\in U,y\in V$. לכן $(x,y)\in U\times V$, ומאחר שמתקיים $U\cap V=\emptyset$, בהכרח $U\times V\cap\Delta=\emptyset$. לכן Δ^c אכן פתוחה.

כעת נניח כי Δ סגורה, כלומר Δ^c פתוחה. אזי לכל $x\neq y$, כלומר $(x,y)\in\Delta^c$, קיים קיבר בסיס $U\times V$ עבורו $(x,y)\in U\times V\subseteq\Delta^c$, ולכן U,V פתוחות וזרות, $x\in U,y\in V$ - כלומר X האוסדורף. ■

טענה 1.7 לכל $i\in\{1,2,3\}$, אם (X,τ) הוא מרחב טופולוגי T_i, אזי גם כל צמצום שלו הוא T_i.

הוכחה: נוכיח עבור T_3, ההוכחות האחרות דומות. תהי $E\subseteq X$, ועליה טופולוגיה מושרית. תהי $x\in E$, אזי $\{x\}$ סגורה בתוך X, ולכן $X\backslash\{x\}$ פתוחה בתוך X, כלומר $E\backslash\{x\}=X\backslash\{x\}\cap E$ פתוחה בתוך E, כלומר $\{x\}$ סגורה בתוך X (למעשה הוכחנו כי T_1 נשמרת בצמצום). כעת יהיו $x\in E$, $A\subseteq E$ סגורה, כך שמתקיים $x\notin A$. מהגדרה, $A=E\cap C$, כאשר C סגורה בתוך X. לכן $x\notin C$, ולכן יש קבוצות U,V פתוחות בתוך X וזרות כך שמתקיים $x\in U,C\subseteq V$, ולכן $x\in U\cap E,A\subseteq V\cap E$, שהן כמובן זרות ופתוחות בתוך E. לכן T_3 נשמרת תחת צמצום. ■

טענה 1.8 לכל $i\in\{1,2,3\}$, אם X,Y מרחבי T_i, אזי גם מרחב המכפלה $X\times Y$ עם טופולוגיית המכפלה הוא T_i.

הוכחה: נוכיח עבור T_3, ההוכחות האחרות דומות. נוכיח שמתקיים התנאי השקול לרגולריות (שימור T_1 קל ויישאר כתרגיל). תהי $(x,y)\in X\times Y$, ותהי $U_1\times U_2$ קבוצה פתוחה מהבסיס עבורה $(x,y)\in U_1\times U_2$. אזי $x\in U_1,y\in U_2$, ומהנחת T_3 על נקבל $V_1\subseteq X,V_2\subseteq Y$ פתוחות עבורן מתקיים $x\in V_1\subseteq\overline{V_1}\subseteq U_1,y\in V_2\subseteq\overline{V_2}\subseteq U_2$, ולכן $(x,y)\in V_1\times V_2\subseteq\overline{V_1\times V_2}=\overline{V_1}\times\overline{V_2}\subseteq U_1\times U_2$. לכן T_3 אכן נשמר במכפלה. ■

דוגמא נציג דוגמא חשובה לשני דברים - מרחב שהוא T_3 ולא T_4, וכן לשני מרחבי T_4 שמכפלתם אינה מרחב T_4.

נגדיר את הישר העשיר $\mathbb{R}_l$ להיות המרחב הטופולוגי על $\mathbb{R}$ שנוצר על ידי $\{[a,b)\mid a<b\}$.

נראה כי הוא T_4, ולכן גם T_3, ולכן $\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$ גם הוא T_3 - אבל נראה שהוא לא T_4.

T_1 מתקיים על $\mathbb{R}_l$, כי הטופולוגיה שלו חזקה יותר מאשר הסטנדרטית. כעת, תהיינה A,B סגורות וזרות בתוך $\mathbb{R}_l$. אזי לכל $a\in A\subseteq\mathbb{R}\backslash B$, כאשר נזכור כי $\mathbb{R}\backslash B$ פתוחה, יש $y_a\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $[a,y_a)\cap B=\emptyset$. באותו אופן, לכל $b\in B$ קיים $y_b\in\mathbb{R}$

עבורו $[b,y_b)\cap A=\emptyset$. נגדיר

$$
\begin{aligned}
U &= \bigcup_{a\in A}[a,y_a)\\
V &= \bigcup_{b\in B}[b,y_b)
\end{aligned}
$$

ברור כי U,V פתוחות. כמו כן, הן זרות, כי אחרת היו $a\in A,b\in B$ כך שמתקיים $[a,y_a)\cap[b,y_b)\neq\emptyset$. אם $a>b$, נובע $[b,y_b)\cap A\neq\emptyset$, בסתירה, ובדומה אם $a<b$.
לכן הוכחנו כי $\mathbb{R}_l$ אכן T_3.
כעת נראה כי $\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$ אינו T_4. נביט בקבוצה

$$L=\{(x,-x)\mid x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}_l\times\mathbb{R}_l$$

L סגורה, שכן הטופולוגיה של $\mathbb{R}_l^2$ חזקה יותר מאשר $\mathbb{R}^2$. נניח בשלילה כי $\mathbb{R}_l^2$ הוא T_4. הטופולוגיה המושרית על L היא דיסקרטית. לכן כל תת קבוצה $A\subseteq L$ סגורה בתוך L, ולכן סגורה גם בתוך $\mathbb{R}_l^2$. מהנחת השלילה, לכל $A\subseteq L$, ניתן להפריד בין $A,L\backslash A$, כלומר קיימות U_A,V_A פתוחות בתוך $\mathbb{R}_l^2$ וזרות, עבורן $A\subseteq U_A,L\backslash A\subseteq V_A$. תהי $D=\mathbb{Q}^2\subseteq\mathbb{R}_l^2$, ונגדיר העתקה

$$
\begin{aligned}
\varphi:2^L &\to 2^D\\
\varphi(A) &= \begin{cases} D\cap U_A & A\neq\emptyset,L\\ \emptyset & A=\emptyset\\ L & A=D\end{cases}
\end{aligned}
$$

נוכיח כי φ חד־חד־ערכית, ונקבל סתירה משיקולי עוצמות. נשים לב שאם $A\neq\emptyset,L$, אזי $D\cap U_A$ אינה ריקה, כי U_A מכילה איבר בסיס, שחייב להכיל נקודה רציונאלית. בנוסף, $D\cap U_A\neq D$, כי $D\cap V_A\neq\emptyset$.
נרצה להראות כי לכל $A,B\subseteq L$ עם $A\neq B$ מתקיים $\varphi(A)\neq\varphi(B)$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי קיים $x\in A\backslash B$. אזי $x\in L\backslash B$, כלומר $x\in U_A\cap V_B$. לכן $U_A\cap V_B$ קבוצה פתוחה לא ריקה, ולכן קיים $y\in D\cap U_A\cap V_B$, ולכן $D\cap U_A\neq D\cap U_B$.
הגענו לסתירה, שכן $\left|2^L\right|>\left|2^D\right|$, שכן $|L|>|D|$.

טענה 1.9 כל מרחב מטרי הוא T_4.

הוכחה: קל לבדוק כי T_1 מתקיים ־ בדקו.
יהיו A,B סגורות וזרות במרחב המטרי (X,d). נגדיר עבור $x\in X,E\subseteq X$ את המרחק

$$d(x,E)=\inf_{e\in E}d(x,e)$$

נשים לב כי לכל $x \in A$, $d(x,B) > 0$, כי אחרת $x \in \overline{B} = B$. לכל $a \in A, b \in B$ נסמן

$$\begin{aligned} r_{a,B} &= d(a,B) \\ r_{b,A} &= d(b,A) \end{aligned}$$

מתקיים כמובן

$$\begin{aligned} A &\subseteq U = \bigcup_{a \in A} B_{\frac{r_{a,B}}{2}}(a) \\ B &\subseteq V = \bigcup_{b \in B} B_{\frac{r_{b,A}}{2}}(b) \end{aligned}$$

ואז U, V פתוחות וזרות, ומקיימות את הנדרש. ■

1.2 הלמה של אוריסון

משפט 1.10 (הלמה של אוריסון) יהי X מרחב טופולוגי T_4, ויהיו $C, D \subseteq X$ קבוצות סגורות, זרות ולא ריקות. אזי יש פונקציה $f : X \to [0,1]$ רציפה כך שמתקיים $f|_C = 0, f|_D = 1$.

הוכחה: ניזכר בתנאי השקול שראינו עבור T_4 - לכל A סגורה שמוכלת בתוך U פתוחה קיימת V פתוחה כך שמתקיים $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. נגדיר אינדוקטיבית סדרה אינסופית של קבוצות פתוחות וסגורות: C, D סגורות. נתחיל עם $C_0 = C$, והיות והקבוצה $X \backslash D$ פתוחה ומכילה את C, ניקח $V_1 = X \backslash D$, ואז $C_0 \subseteq V_1$. מנורמליות, קיימת קבוצה סגורה $C_{\frac{1}{2}}$ ופתוחה $V_{\frac{1}{2}}$ כך שמתקיים $C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq C_{\frac{1}{2}} \subseteq V_1$ ($\overline{V_{\frac{1}{2}}} = C_{\frac{1}{2}}$). מנורמליות, יש $C_{\frac{1}{4}}, V_{\frac{1}{4}}, C_{\frac{3}{4}}, V_{\frac{3}{4}}$ פתוחות וסגורות לפי הסימונים (C סגורות, V פתוחות) כך שמתקיים

$$C_0 \subseteq V_{\frac{1}{4}} \subseteq C_{\frac{1}{4}} \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq C_{\frac{1}{2}} \subseteq V_{\frac{3}{4}} \subseteq C_{\frac{3}{4}} \subseteq V_1$$

אינדוקטיבית, לכל k יש $\left\{C_{\frac{i}{2^k}}\right\}_{i=0}^{2^k-1}$, $\left\{V_{\frac{i}{2^k}}\right\}_{i=1}^{2^k}$, כאשר כל C סגורה, כל V פתוחה, ומתקיים

$$C_0 \subseteq V_{\frac{1}{2^k}} \subseteq C_{\frac{1}{2^k}} \subseteq V_{\frac{2}{2^k}} \subseteq C_{\frac{2}{2^k}} \subseteq \cdots \subseteq V_{\frac{2^k-1}{2^k}} \subseteq C_{\frac{2^k-1}{2^k}} \subseteq V_1$$

כעת, נגדיר

$$\begin{aligned} f : X &\to [0,1] \\ f(x) &= \begin{cases} \inf\{t \mid x \in V_t\} & \exists t. x \in V_t \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{aligned}$$

לכל $x \in D$, מתקיים $x \notin V_1$, ולכן $x \notin V_t$ לכל t, כלומר $f(x) = 1$.
לכל $x \in C$, מתקיים $x \in C \subseteq V_{\frac{1}{2^k}}$, ולכן לכל k, מתקיים $f(x) \leq \frac{1}{2^k}$, כלומר $f(x) = 0$.

נוכיח רציפות. ניקח תת בסיס של $[0,1]$:

$$\{(a,1] \mid a \in [0,1)\} \cup \{[0,b) \mid b \in (0,1]\}$$

נוכיח שתמונות הפוכות של איברי הן פתוחות, ונסיים. אם $x \in f^{-1}([0,b))$, כלומר $0 \le f(x) < b$, אזי קיים $t < b$ עבורו $x \in V_t$. נרצה להראות כי

$$f^{-1}([0,b)) = \bigcup_{t<b} V_t$$

הראינו כבר הכלה בכיוון $\subseteq$. מצד שני, אם $x \in \bigcup_{t<b} V_t$, אז קיים $t_0 < b$ כך שמתקיים $x \in V_{t_0}$ ולכן $f(x) \le t_0 < b$, כלומר $x \in f^{-1}([0,b))$. לכן הראינו כי התמונה ההפוכה של $[0,b)$ אכן פתוחה.

כעת נראה כי $f^{-1}((b,1])$ פתוחה על ידי כך שנראה שהמשלים שלה קבוצה סגורה על ידי

$$f^{-1}([0,b]) = \bigcap_{t>b} C_t$$

אם $x \in f^{-1}([0,b])$, אזי $f(x) \le b$, כלומר $x \in V_t \subseteq C_t$ לכל $t > b$, כלומר $x \in \bigcap_{t>b} C_t$.

אם $x \notin f^{-1}([0,b])$, אזי $f(x) > b$, כלומר יש $f(x) > t_2 > t_1 > b$, כלומר $x \notin V_{t_2}$, ולכן $x \notin C_{t_1}$, שכן $C_{t_1} \subseteq V_{t_2}$. כלומר $x \notin \bigcap_{t>b} C_t$.

בסך הכל, סיימנו. ■