טופולוגיה

ⓒ ארזים

9 בנובמבר 2016

בשיעור שעבר ראינו את ההגדרות של טופולגויות ושל בסיסים ניתן הגדרה נוספת:

הגדרה 0.1 $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ נקראת תת־בסיס אם לכל $x \in X$ קיים $B \in \mathcal{B}$ עבורו $x \in B$.

ראינו כבר כי קבוצת כל האיחודים של קבוצות מתוך בסיס מסויים היא טופולוגיה. לעומת זאת, קבוצת כל החיתוכים הסופיים של קבוצות מתוך תת־בסיס היא בסיס, ולכן קבוצת כל האיחודים של חיתוכים סופיים של קבוצות מתוך תת־בסיס היא טופולוגיה.

1 פעולות על מרחבים טופולוגיים

1.1 צמצום

הגדרה 1.1 יהי (X, τ_X) מרחב טופולוגיה ויהי $Y \subseteq X$. הטופולוגיה המושרית על Y היא

$$\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau_X\}$$

תרגיל בדקו שזו אכן טופולוגיה.

הערה 1.2 לא יכול להיות שמתקיים $\tau_Y \not\subseteq \tau_X$, כלומר הפתיחות לאו דווקא נשמרת.

דוגמא $X = \mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, $Y = [0,1]$. הקבוצה $[0, \frac{1}{2})$ אינה פתוחה בתוך X אבל כן בתוך Y, כי $[0,1] \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = [0, \frac{1}{2})$.

1.2 מכפלה

1.2.1 מכפלת שני מרחבים

הגדרה 1.3 יהיו $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ מרחבים טופולוגיים. נגדיר את הבסיס למרחב $X \times Y$ להיות $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \tau_x, v \in \tau_y\}$, ונגדיר את טופולוגיית המכפלה הזו להיות הטופולוגיה שנוצרת על ידי הבסיס הזה.

הערה 1.4 מדוע $\mathcal{B}$ אכן בסיס? לכל $(x,y) \in X \times Y$ מתקיים בבירור $(x,y) \in X \times Y \in \mathcal{B}$.
כעת, אם $(x,y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$ אזי יש שייכות בכל קואורדינטה, ולכן

$$(x,y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \subseteq (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$

טענה 1.5 אם $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_y$ הם בסיסים של τ_X, τ_Y אז הקבוצה $\{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_X, B_2 \in \mathcal{B}_Y\}$ היא בסיס לטופולוגיית המכפלה.

ההוכחה לא מסובכת, ופרטיה נשארים כתרגיל.

הגדרה 1.6 יהיו $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ מרחבים מטריים. נגדיר

$$\begin{aligned} \pi_1 : X_1 \times X_2 &\to X_1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2 \\ \pi_2 : X_1 \times X_2 &\to X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

אלו נקראות <u>ההטלות</u> של $X_1 \times X_2$ על X_1 ועל X_2, בהתאמה.

הערה 1.7 נשים לב כי

$$\begin{aligned} \pi_1^{-1}(U) &= U \times X_2 \\ \pi_2^{-1}(V) &= X_1 \times V \end{aligned}$$

טענה 1.8 הקבוצה $\left\{\pi_1^{-1}(U) \mid U \in \tau_1\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(V) \mid V \in \tau_2\right\}$ היא תת בסיס של $X_1 \times X_2$, והיא יוצרת את טופולוגיית המכפלה.

הוכחה: העובדה שזה תת בסיס קלה, שכן זה מכיל את הקבוצה $X \times Y$. כמו כן, כל קבוצה מהסוג $U \times V$, כאשר $U \in \tau_1, V \in \tau_2$, ניתן לכתוב בתור $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$. ■

1.2.2 מכפלת כמות סופית של מרחבים

הגדרה 1.9 אם (X_i, τ_i) מרחבים טופולוגיים לכל $1 \le i \le n$, הבסיס

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \ldots \times U_n \mid \forall 1 \le i \le n \;\; U_i \in \tau_i\}$$

יוצר את טופולוגיית המכפלה, וכמו כן

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{\pi_i^{-1}(U) \mid U \in \tau_i\right\}$$

תת בסיס של אותה טופולוגיה.

1.2.3 מכפלה כלשהי של מרחבים

הגדרה 1.10 יהיו (X_α, τ_α) מרחבים טופולוגיים לכל $\alpha \in I$ כאשר I קבוצת אינדקסים כלשהי. נגדיר שתי טופולוגיות על $\prod_\alpha X_\alpha$:

1. טופולוגיית המכפלה - נסמנה τ_{prod}. זו הטופולוגיה שנוצרת מהתת בסיס

$$\bigcup_{\alpha \in I} \left\{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid U \in \tau_\alpha\right\}$$

2. טופולוגיית הקופסא - נסמנה τ_{box}. זו הטופולוגיה שנוצרת מהבסיס

$$\left\{\prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid \forall \alpha \in I \;\; U_\alpha \in \tau_\alpha\right\}$$

הערה 1.11 נשים לב שטופולוגיית המכפלה נוצרת על ידי כל המכפלות

$$\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$$

שבהן רק מספר סופי של U_α אינן X_α, ולכן τ_{box} חזקה יותר מאשר τ_{prod}.

דוגמא תהי I קבוצה אינסופית כלשהי, ויהי $X = \prod_I \mathbb{R}$. נביט בקבוצה $U = \prod_I (-1,1)$. ברור שמתקיים $U \in \tau_{\text{box}}$, אבל גם $U \notin \tau_{\text{prod}}$.

2 סגירות במרחב טופולוגי

הגדרה 2.1 בהינתן (X, τ) מרחב טופולוגי, קבוצה $C \subseteq X$ נקראת סגורה אם $X \backslash C \in \tau$.

הערה 2.2 $\emptyset, X$ הן סגורות.

הערה 2.3 קבוצת הקבוצות הסגורות סגורה לחיתוכים כלשהם, ולאיחודים סופיים.

דוגמאות

1. בטופולוגיה הדיסקרטית, כל הקבוצות הן סגורות.
2. במרחב המטרי, הקבוצה $\{y \mid d(x,y) \le r\}$ עבור $x \in X$ ועבור $r \ge 0$ היא סגורה, כל לכל z במשלים קיים $\varepsilon > 0$ עבורו

$$z \in B(z, \varepsilon) \subseteq \{y \mid d(x,y) > \varepsilon\}$$

2.1 סגור, פנים ושפה

הגדרה 2.4 יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ותהי $A\subseteq X$ קבוצה כלשהי. <u>הסגור</u> של A, שמסומן $\overline{A}$, הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות המכילות את A, כלומר הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A.

דוגמא ניקח $X=\{a,b\}$, עם $\tau=\{\emptyset,\{a\},X\}$. כעת $\overline{\{b\}}=\{b\}$, $\overline{\{a\}}=X$.

הגדרה 2.5 בהינתן מרחב טופולוגי (X,τ), ויהי $x\in X$. <u>סביבה</u> של x היא קבוצה $E\subseteq X$ כך שקיימת קבוצה פתוחה U המקיימת $x\in U\subseteq E$.

דוגמא הקטע $[0,1]$ הוא סביב של $\frac{1}{2}$.

טענה 2.6 בהינתן $A\subseteq X$, $x\in\overline{A}$ אם ורק אם לכל סביבה E של x מתקיים $E\cap A\neq\emptyset$.

הוכחה: נוכיח שקילות בין השלילות.

נניח כי $x\notin\overline{A}$, ואז $x\in X\backslash\overline{A}$, וזו קבוצה פתוחה שלא נחתכת עם A.

כעת נניח כי קיימת סביבה E של x שלא נחתכת עם A. נובע כי יש קבוצה פתוחה U כך שמתקיים $x\in U$ וכן $U\cap A=\emptyset$. לכן $X\backslash U$ סגורה ומכילה את A, כלומר $\overline{A}\subseteq X\backslash U$, ולכן $x\notin\overline{A}$. ■

טענה 2.7 .1

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

.2

$$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$$

הוכחה: לגבי הסעיף הראשון: יהי $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. נניח כי $x\in\overline{A}$, אזי מהטענה הקודמת כל סביבה של x נחתכת עם A, ולכן גם עם האיחוד, כלומר $x\in\overline{A\cup B}$.

כמו כן, $A\subseteq\overline{A},B\subseteq\overline{B}$, ולכן $A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$, אבל $\overline{A}\cup\overline{B}$ סגורה, ולכן מההגדרה $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$. בסך הכל קיבלנו שוויון.

הוכחת הסעיף השני זהה להוכחת החלק השני של הסעיף הראשון. ■

דוגמא נדגים מדוע יש רק הכלה בסעיף השני. למשל עבור $A=(0,1)\,,B=(1,2)$, מתקיים $A\cap B=\emptyset$, ולכן $\overline{A\cap B}=\emptyset$, אבל $\overline{A}=[0,1]\,,\overline{B}=[1,2]$ ולכן $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$.

דוגמא אחרת היא לקחת $A=\mathbb{Q},B=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. כאן החיתוך ריק, אבל הסגור של כל קבוצה הוא כל $\mathbb{R}$.

הגדרה 2.8 $A\subseteq X$ תקרא <u>צפופה</u> אם $\overline{A}=X$.

הגדרה 2.9 בהינתן קבוצה $A\subseteq X$, נגדיר את <u>הפנים</u> של A, שנסמנו A^0, להיות איחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות בתוך A. באופן שקול, זו הקבוצה הפתוחה המקסימלית אותה A מכילה.

הגדרה 2.10 <u>השפה</u> של קבוצה $A \subseteq X$ היא $\partial A = \overline{A} \backslash A^0$.

הגדרה 2.11 $x \in X$ היא <u>נקודת הצטברות</u> של A אם כל סביבה של X מכילה נקודה מתוך A שאינה x.

טענה 2.12 יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $A \subseteq X$ קבוצה. נסמן בתור A' את קבוצת נקודות ההצטברות של A. אזי

$$\overline{A} = A \cup A'$$

הוכחה: יהי $x \in A \cup A'$. אם $x \in A$, ברור שגם $x \in \overline{A}$. אם $x \in A'$, אז כל סביבה של x נחתכת עם A, ומהטענה, $x \in \overline{A}$.

יהי $x \in \overline{A}$. אם $x \in A$ אז וודאי $x \in A \cup A'$. אם $x \in \overline{A} \backslash A$, אזי כל סביבה של x נחתכת עם A בנקודה שאינה x - שכן $x \notin A$. לכן $x \in A'$. ■

תזכורת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא רציפה אם

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

אם $(X, d_x), (Y, d_y)$ מרחבים מטריים, $f : X \to Y$ רציפה אם

$$\forall x \in X, \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

הגדרה 2.13 אם $(X, \tau_x), (Y, \tau_y)$ מרחבים טופולוגיים, $f : X \to Y$ נקראת רציפה אם

$$\forall U \in \tau_y \ \ f^{-1}(U) \in \tau_x$$

טענה 2.14 עבור מרחבים מטריים והטופולוגיה המושרית בהם, ההגדרות שקולות.

הוכחה: נניח כי ההגדרה במרחבים טופולוגיים מתקיימת. יהי $x \in X, \varepsilon > 0$, ניקח $U = B_\varepsilon(f(x))$. לפי ההנחה, $f^{-1}(U)$ פתוחה, וכן $x \in f^{-1}(U)$ כלומר קיים $\delta > 0$ עבורו $B_\delta(x) \subseteq U$, וזה בדיוק מה שרצינו להראות.

כעת נניח כי ההגדרה במרחבים מטריים מתקיימת. תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. יהי $x \in f^{-1}(U)$. לכן $f(x) \in U$, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ עבורו $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. לפי ההנחה, קיים $\delta > 0$ עבורו $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$, כלומר $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$, ולכן $f^{-1}(U)$ אכן פתוחה. ■

טענה 2.15 יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, ותהי $f : X \to Y$. התנאים הבאים שקולים.

1. f רציפה.

2. לכל קבוצה סגורה $C \subseteq Y$ הקבוצה $f^{-1}(C) \subseteq X$ סגורה.

3. אם $\mathcal{B}$ בסיס או תת בסיס לטופולוגיה של Y, אזי לכל $B \in \mathcal{B}$ מתקיים $f^{-1}(B) \in \tau_x$.

4. לכל $x \in X$ ולכל סביבה W של $f(x)$ מתקיים שהקבוצה $f^{-1}(W)$ היא סביבה של x.

5. לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

הוכחה: $2 \Leftarrow 1$: $f^{-1}(Y \backslash C)$ פתוחה, ולכן $X \backslash f^{-1}(Y \backslash C)$ היא סגורה, וזו בדיוק $f^{-1}(C)$.
$1 \Leftarrow 2$: בדיוק באותה דרך.
$1 \Leftarrow 3$: תהי $U \in \tau_y$, אזי $U = \bigcup B_\alpha$ עבור $\{B_\alpha\} \subseteq \mathcal{B}$. כעת

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup B_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$$

לכן $f^{-1}(U)$.
$3 \Leftarrow 1$: טריוויאלי.
$4 \Leftarrow 1$: יהי $x \in X$, ותהי W סביבה של $f(x)$. קיימת U פתוחה עבורה $f(x) \in U \subseteq W$, ואז $f^{-1}(U)$ פתוחה ומקיימת $x \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(W)$, ולכן $f^{-1}(W)$ סביבה של x.
$1 \Leftarrow 4$: תהי $U \subseteq Y$ פתוחה. יהי $x \in f^{-1}(U)$, כלומר $f(x) \in U$. U סביבה של $f(x)$, ולכן $f^{-1}(U)$ סביבה של x. לכן יש קבוצה פתוחה $x \in U_x \subseteq f^{-1}(U)$. כלומר

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} U_x$$

ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.
$5 \Leftarrow 1$: יהי $x \in \overline{A}$. נרצה להראות כי $f(x) \in \overline{f(A)}$. כלומר, יש להראות שכל סביבה של $f(x)$ חותכת את $f(A)$. תהי E סביבה של $f(x)$, אזי יש קבוצה פתוחה $f(x) \in U \subseteq E$. נקבל כי $f^{-1}(U)$ פתוחה, וכן $x \in f^{-1}(U)$. לכן $f^{-1}(U)$ סביבה של x, ולכן נחתכת עם A. מכאן U נחתכת עם $f(A)$, כלומר E נחתכת עם $f(A)$ - ולכן $f(x) \in \overline{A}$.
$2 \Leftarrow 5$: תהי $C \subseteq Y$ קבוצה סגורה. מההנחה מתקיים

$$f\left(\overline{f^{-1}(C)}\right) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

לכן מתקיים $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$. ההכלה ההפוכה תמיד מתקיימת, ולכן $f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$, כלומר C סגורה. ■

הערה 2.16 הפונקציה הקבועה תמיד רציפה, כי $f^{-1}(U) \in \{\emptyset, X\}$ לכל U.

הערה 2.17 אם X, Y, Z מרחבים טופולוגיים וכן $f: X \to Y, g: Y \to Z$ רציפות, אזי $g \circ f: X \to Z$ רציפה.

תרגיל עבור $f, g \in X \to \mathbb{R}$ בדקו כי $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ (כאשר $g \neq 0$ תמיד) רציפות גם כן.

הערה 2.18 נניח כי $\{X_\alpha\}$ מרחבים טופולוגיים, וכי $X = \prod X_\alpha$ מרחב המכפלה, אזי לכל α, ההטלה $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ רציפה ביחס לטופולוגיית המכפלה, ולכן גם ביחס לטופולוגיית הקופסה.

הערה 2.19 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המוגדרת על ידי $f(t) = (t, t, \ldots, t)$ היא רציפה ביחס לטופולוגיית המכפלה, אבל <u>לא</u> ביחס לטופולוגיית הקופסה. זאת משום שהקבוצה $\prod \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ היא קבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, אבל תמונתה ההפוכה היא $\{0\}$ - שאינה פתוחה.