טופולוגיה

ⓒ ארזים

2 בנובמבר 2016

בקורס זה נעסוק בחקר תכונות של צורות, שאינן משתנות תחת "דפורמציה רציפה".
מבחינה טופולוגית, כדור פוטבול זהה לכדורגל. כמו כן, בייגל זהה לספל. עם זאת, כדור אינו זהה לספל.
אחד המשפטים המרכזיים שאליהם נעבוד הוא משפט העקומה של ז'ורדן ־ כל עקומה רציפה מחלקת את המישור לשתי קובצות ־ פנים וחוץ. כל עקומה רציפה בין נקודה מהפנים ונקודה מהחוץ חייבת לחתוך את העקומה.

מטרה לפתח שפה ומושגים שיאפשרו מיון כזה של צורות (קבוצות פתוחות/סגורות, פונקציות רציפות, קומפקטיות וכולי).

דוגמא ראשונה לאינווריאנט טופולוגי תהיה מאפיין אוילר לצורות שהן רב־פאות (פוליהדרה):
עבור פוליהדרון p עם f פאות, v קודקודים, e צלעות, אזי:

$$\chi\left(p\right)=f-e+v$$

למשל עבור p שהוא קובייה:

$$\chi\left(p\right)=6-12+8=2$$

למעשה, כל פוליהדרון ש"זהה" טופולוגית לכדור מקיים $\chi\left(p\right)=2$. כמו כן, χ הוא אינווריאנט טופולוגי. זה משפט אויילר, שכאן לא ניסחנו פורמלית בכלל.
לעומת זאת, נתבונן בקובייה שבמאצע שלה נעשה חור ריבועי (זה לא זהה לכדור, אלא לבייגל). כאן יתקיים (זה מומחש עם ציורים, מצטער)

$$\chi\left(p\right)=16-32+16=0$$

1 מרחבים מטריים

הגדרה 1.1 תהי X קבוצה. הפונקציה $d:X\times X\to[0,\infty)$ תיקרא <u>מטריקה</u> אם מתקיימים הבאים:

1. $\forall x,y\in X\ \ d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
2. $\forall x,y\in X\ \ d\left(x,y\right)=0\iff x=y$

3. אי שוויון המשולש: $\forall x,y,z\in X \;\; d\left(x,z\right)\leq d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

דוגמאות

1. עבור $X=\mathbb{R}$

$$d\left(x,y\right)=\left|x-y\right|$$

2. עבור $X=\mathbb{R}^{n}$

$$d_{l_{1}}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$$

3. עבור $X=\mathbb{R}^{n}$

$$d_{l_{2}}\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i}-y_{i}\right)^{2}}$$

4. עבור $X=\mathbb{R}^{n}$

$$d_{l_{\infty}}\left(x,y\right)=\max_{1\leq i\leq n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$$

נוכיח כאן את אי שוויון המשולש:

$$\begin{aligned}d_{l_{\infty}}\left(x,z\right) & = \max_{1\leq i\leq n}\left|x_{i}-z_{i}\right|=\left|x_{i_{0}}-z_{i_{0}}\right|\leq\left|x_{i_{0}}-y_{i_{0}}\right|+\left|y_{i_{0}}-z_{i_{0}}\right|\leq\\ & \leq d_{l_{\infty}}\left(x,y\right)+d_{l_{\infty}}\left(x,y\right)\end{aligned}$$

5. עבור $X=\mathbb{R}$, <u>המטריקה הדיסקרטית</u>:

$$d\left(x,y\right)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

6. בהינתן גרף קשיר $G=\left(V,E\right)$, מטריקה על V היא זו שבה $d\left(u,v\right)$ הוא אורך המסילה הקצרה ביותר שמתחילה בקודקוד u ומסתיימת במסילה v.

הגדרה 1.2 הזוג $\left(X,d\right)$, כאשר X קבוצה אשר d מטריקה עליה, נקרא <u>מרחב מטרי</u>.

הגדרה 1.3 בהינתן מרחב מטרי (X,d), <u>הכדור הפתוח</u> ברדיוס $r>0$ סביב הנקודה $x\in X$ הוא

$$B_r(x)=\{y\in X \mid d(x,y)<r\}$$

<u>הכדור הסגור</u> ברדיוס $r>0$ סביב הנקודה $x\in X$ הוא

$$\overline{B_r(X)}=\{y\in X \mid d(x,y)\le r\}$$

דוגמא $X=\mathbb{R}^2$. נרצה את הכדור ברדיוס 1 סביב הראשית. במטריקת d_{l_∞} נקבל ריבוע סביב הראשית, שקודקודיו בנקודות $(\pm1,\pm1)$, עם או בלי השפה (כדור סגור או פתוח). במטריקת d_{l_2}, זה יהיה מעגל היחידה, עם או בלי השפה, שוב. במטריקת d_{l_1} נקבל ריבוע שקודקודיו בנקודות $(0,\pm1),(\pm1,0)$, שוב, עם או בלי השפה.

פעולות בסיסיות עם מרחבים מטריים

1. צמצום: (X,d) הוא מרחב מטרי, $X_0\subseteq X$ תת קבוצה, אזי $(X_0,d\mid_{X_0\times X_0})$ הוא מרחב מטרי.

דוגמא: צמצום $(\mathbb{R}^n,d_{l_2})$ על $X_0=\{(x,0,\dots,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ נותן מרחב ש"זהה" במובן שלא הגדרנו למרחב $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

2. מכפלה: בהינתן $(X_1,d_1),(X_2,d_2)$ מרחבים מטריים, נסמן $X=X_1\times X_2$. ישנן כל מיני מטריקות אפשריות על X, למשל:

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$$

באופן דומה נוכל להגדיר $X=X_1\times\cdots\times X_n$ עבור (X_i,d_i) שהם מרחבים מטריים לכל $1\le i\le n$, ואז להגדיר

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_iy_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$

תרגיל בדקו את אי שוויון המשולש.

הגדרה 1.4 יהי (X,d) מרחב מטרי, ותהי $U\subseteq X$. U תיקרא <u>קבוצה פתוחה</u> אם לכל $x\in U$ קיים $r>0$ כך שמתקיים

$$B_r(x)\subseteq U$$

באופן שקול, U היא איחוד של כדורים פתוחים.

טענה 1.5 1. איחוד (כלשהו) של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

2. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה:

1. נניח כי $A=\bigcup_\alpha U_\alpha$, כאשר לכל α U_α פתוחה. נראה כי A פתוחה. יהי $x\in A$. לכן יש α כך שמתקיים $x\in U_\alpha$, ולכן קיים $B_r\left(x\right)\subseteq U_\alpha\subseteq A$.

2. נניח כי

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}U_i$$

כאשר U_i פתוחות לכל i. נראה כי A פתוחה. יהי $x\in A$. לכל i, $x\in U_i$, ולכן לכל i קיים $B_{r_i}\left(x\right)\subseteq U_i$. נסמן $r=\min\left\{r_i\right\}>0$ (חיובי כי יש כמות סופית של איברים חיוביים), ואז מתקיים $B_r\left(x\right)\subseteq A$.

■

דוגמא בטענה הקודמת, סופיות החיתוך נדרשת: נתבונן במרחב המטרי $\left(\mathbb{R},\left|\cdot\right|\right)$, ובו ניקח

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\left\{0\right\}$$

וזו אינה קבוצה פתוחה.

2 מרחבים טופולוגיים

תהי X קבוצה, ותהי $\tau\subseteq P\left(X\right)$ קבוצת תת קבוצות של X.

הגדרה 2.1 $\left(X,\tau\right)$ מרחב טופולוגי (או τ הטופולוגיה של X) אם מתקיימים הבאים:

1. $\emptyset,X\in\tau$
2. אם $B\subseteq\tau$, אזי

$$\bigcup_{U\in B}U\in\tau$$

3. אם $B\subseteq\tau$, $\left|B\right|\in\mathbb{N}$, אזי

$$\bigcap_{U\in B}U\in\tau$$

דוגמאות

1. (X,d) מרחב מטרי, τ שהיא אוסף הקבוצות הפתוחות היא טופולוגיה.

2. $\tau=\{\emptyset,X\}$ לכל קבוצה X היא טופולוגיה - ונקראת לרוב הטופולוגיה הטריוויאלית.

3. $\tau=P\left(X\right)$ לכל קבוצה X היא טופולוגיה - ונקראת לרוב הטופולוגיה הדיסקרטית. נבחין כי המטריקה הדיסקרטית על X משרה בדיוק את הטופולוגיה הזו.

4. X קבוצה, $\tau=\{U\subseteq X\mid |X\backslash U|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$ זו טופולוגיה. תרגיל: לבדוק שמתקיים $|x|=\infty$ אזי טופולוגיה זו אינה מושרית ממטריקה.

הגדרה 2.2 אם τ_1,τ_2 טופולוגיות על X, נאמר כי τ_1 חזקה יותר מאשר τ_2 אם $\tau_2\subseteq\tau_1$. נאמר במקרה זה כי τ_2 חלשה יותר מאשר τ_1.

דוגמא טופולוגיה שאינה מושרית ממטריקה: תהי $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\emptyset,\{a,b\},\{a\}\}$. נניח בשלילה שיש מטריקה d מעל X שמשרה את τ. נסמן $d\left(a,b\right)=r$, ואז $B_{\frac{r}{2}}\left(b\right)=\{b\}$, כלומר $\{b\}\in\tau$, בסתירה.

2.1 בסיס של טופולוגיה

הגדרה 2.3 תהי X קבוצה כלשהי, ותהי $\mathcal{B}\subseteq P\left(X\right)$. $\mathcal{B}$ נקראת בסיס על X אם:

1. $\mathcal{B}$ היא כיסוי של X, משמע לכל $x\in X$ קיים $B\in\mathcal{B}$ המקיים $x\in B$.

2. לכל $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ ולכל $x\in B_1\cap B_2$ קיימת $B_3\in\mathcal{B}$ המקיימת $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$.

דוגמא

1. יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי $\{B_r\left(x\right)\}_{\substack{r>0\\x\in X}}$ הם בסיס. העובדה שזה כיסוי היא טריוויאלית, והתכונה השנייה מתקיימת כיוון שחיתוך של שני כדורים פתוחים הוא פתוח, ולכן מכיל כדור סביב כל נקודה בו.

2. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי τ היא בבירור בסיס.

טענה 2.4 בהינתן קבוצה X ובסיס $\mathcal{B}$ שלה, אזי אוסף כל האיחודים של קבוצות מתוך $\mathcal{B}$ הוא טופולוגיה על X. טופולוגיה זו נקראת הטופולוגיה הנוצרת על ידי $\mathcal{B}$.

הוכחה: נסמן בתור τ את אוסף כל האיחודים של קבוצות מתוך $\mathcal{B}$. נוכיח את תכונות הטופולוגיה:

1. $\emptyset\in\tau$ (איחוד ריק), $X\in\tau$ מתכונת הכיסוי.

2. אם $U_\alpha\in\tau$ לכל $\alpha\in I$ עבור I כלשהו, אזי כל U_α היא איחוד של קבוצות מתוך $\mathcal{B}$, ולכן גם האיחוד שלהן.

3. מספיק לבדוק שחיתוך של שתי קבוצות מתוך τ נמצא בתוך τ, שכן אז לכל חיתוך סופי נוכל להוכיח באינדוקציה (מהנחת האינדוקציה חיתוך של כולן בלי האחרונה נמצא בתוך τ, ואז מהמקרה של שתי קבוצות גם החיתוך עם האחרונה). יהיו $U_1,U_2\in\tau$. אם $U_1\cap U_2\in\tau$, סיימנו. אחרת, יהי $x\in U_1\cap U_2$. לכן קיימות $B_1,B_2\in\mathcal{B}$

המקיימות $B_1 \subseteq U_1, B_2 \subseteq U_2$ וכן $x \in B_1 \cap B_2$. לכן, מתכונה 2 של בסיס, קיימת $B_x \in \mathcal{B}$ כך שמתקיים $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. לכן מתקיים

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{x \in U_1 \cap U_2} B_x$$

■

דוגמא תהי $X = \mathbb{R}$, ונגדיר

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\} \end{aligned}$$

נסמן את הטופולוגיה הנוצרת מהבסיס $\mathcal{B}_1$ בתור τ_1, ואת זו הנוצרת מתוך $\mathcal{B}_2$ בתור τ_2. τ_2 חזקה יותר, שכן מתקיים

$$(a,b) = \bigcup_{n-1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b)$$

לעומת זאת לא ניתן לכתוב את $[a,b)$ בתור איחוד של איברי $\mathcal{B}_1$.

טענה 2.5 יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ויהי $\mathcal{B} \subseteq \tau$ בסיס. אם לכל $U \in \tau$ ולכל $x \in U$ קיים $B \in \mathcal{B}$ כך שמתקיים $x \in B \subseteq U$, אזי τ נוצרת על ידי $\mathcal{B}$.

נשאיר את ההוכחה לשיעור הבא, אבל ננסח מסקנה.

מסקנה הבסיס

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}\}$$

יוצר את הטופולוגיה המושרית על $\mathbb{R}^n$ על ידי המטריקה d_{l_2}.

מסקנה 2.6 המטריקות $d_{l_1}, d_{l_2}, d_{l_\infty}$ משרות על $\mathbb{R}^n$ את אותה טופולוגיה.