# הרצאה 5

**היום**

1) דיאגרמות ואן-קמפן
2) הפונקציה האיזופרימטרית של Dehn
3) תבורות small-cancelation

**תזכורות**

תבורה נקראת מוגבלת סופית אם יש לה מספר סופי

הצגה של תבורה $\rho = \langle S \mid R \rangle$

$S$ - אלפבית יוצרים

$R$ - אלפבית מילים ב- $F(S)$

$\Gamma_\rho \overset{def}{=} F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$ - מחזירה את התבורה

$$\langle\langle R \rangle\rangle = \left\{ \prod_{i=1}^{m} p_i r_i^{\varepsilon_i} p_i^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} r_i \in R \\ p_i \in F(S) \\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \end{array} \right\}$$

presentation - ולא representation

**בעיית המילה**

הלא, בהינתן הצגה, יש אלגוריתם שמכריע אם מלה נתונה $w \in F(S)$ היא 1 בתבורה, כלומר אם $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$

**דיאגרמת ון-קמפן**

**הגדרה:** תהי $\rho = \langle S \mid R \rangle$ הצגה של תבורה $\Gamma$. נסמן ב- $R^{\pm}$ את הבאים הבסיסי של איברי $R$ ולכל הרשמים הבלתי שווים שלהם ושל הפוכיהם.

יהי $w \in F(S)$ מסלול מסלולי.

**דיאגרמת ון קמפן** של $w$ ביחס ל- $\rho$ היא:
גרף מישורי, קשיר, ללא שולי, מכוון, סופי, ולכל קשת יש תווית מתוך $S$, כך ש:

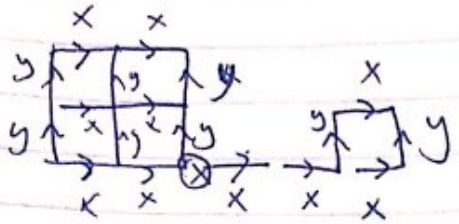
i) הרשמה של כל פאה פנימית שייכת ל- $R^{\pm}$

ii) הרשמה נמצאת ברשמת הפאה החיצונית

ושפת הפעלה המילונית מתאורל לעצמו (ניתן לצד כיוון השרון)
ביטוי w.

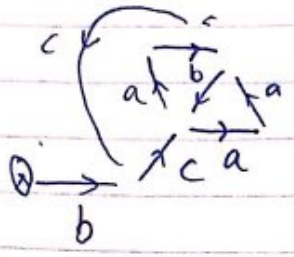
א)

<u>דוגמאות:</u> $\mathbb{Z}^2 = \langle x,y \mid [x,y] \rangle$



$w = x^3 y x^{-1} y^{-1} x^{-2} y^2 x^{-2} y^{-2} x^2$

ב) $\langle a,b,c \mid a^2b,\ acb,\ ac^2 \rangle$

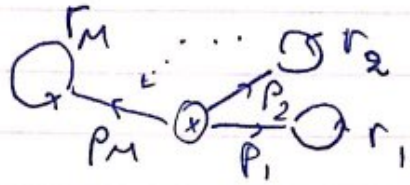


<u>משפט</u> (וולטר דיק, 1933): תהי $G = \langle S \mid R \rangle$ הצגה של חבורה $\Gamma$.
ותהי $w \in F(S)$ (מלמדנמה)
אז $w = 1$ ב- $\Gamma$ $\iff$ $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$ יש ל- $w$ דיאגרמה
ריק קמפן בימס ל- $P$

הוכחה $\Leftarrow$ נניח דיאגרמה ל- $w$ מס' הפעולות המינימלי
בדיאגרמה $D$. ~~נמצא~~ תהי $e$ הקשת הראשונה
במסלול של $w$

תהי $e$ הקשת הראשונה במסלול של $w$ בדיאגרמה.
שבלת בפעלה חסומה שנסמנה $p$ - הרישא של
$w$ עד ל- $e$. $p$ הוא שמקבל ממעגל ל $p$
נגד כיוון השרון והתל ב- $e$.
$w = pqp^{-1}$
ל- $w$ יש דיאגרמה עם פעלה חסומה אחת פחות
לפי הנחת הנגדיה, $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$ ולכן גם $w$.

⇐ לכן $\omega \in \langle\langle R \rangle\rangle$ אז $r_i \in R^c$ $\rho_i \in F(S)$ $\prod_{i=1}^{m} \rho_i r_i \rho_i^{-1}$ שווה




מתיפלים, אבל רק כאשר יש שני קשתות ~~עם~~ שיוצאות מאותו קדקוד, עם אותו כיוון, ובאותה תווית, ~~אלא~~ שאין סמוכות כן לצו כסדר הנכון שמדים הקדקוד

מקרים:

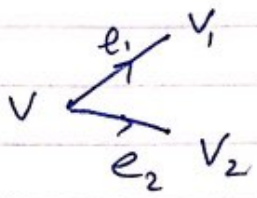
I שלושה קדקודים שונים

II $v = v_1 \neq v_2$

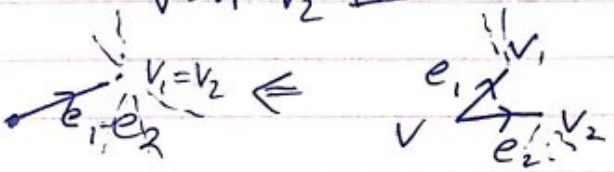
$v = v_2 \neq v_1$

III $v \neq v_1 = v_2$

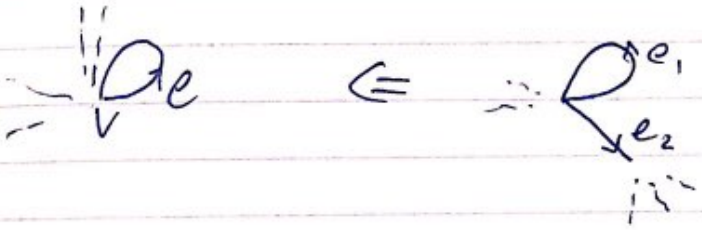
IV $v = v_1 = v_2$



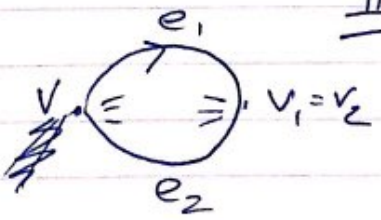

מקרה I




מקרה II




מקרה III




IV

הפונקציות הסופיות של Dehn

בהינתן הבעיה $P=\langle S \mid R\rangle$ אז $S$ סופית

לכל $w \in \langle\langle R\rangle\rangle$ נגדיר

$$\mathrm{Area}(w) = \min\left\{ \#\text{מספר המחוברים} \;\middle|\; D \text{ דיאגרמה ל-} w \right\} =$$

$$= \min\left\{ M \;\middle|\; w = \prod_{i=1}^{M} p_i r_i^{\varepsilon_i} p_i^{-1} \right\}$$

$r_i \in R \quad \varepsilon_i \in \{0,1\}$

$p_i \in F(S)$

$P$ הוא הבעיה של Dehn

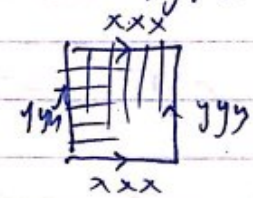
$\delta_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\delta_P(n) := \max_{\substack{w \in \langle\langle R\rangle\rangle \\ |w| \le n}} \mathrm{Area}_P(w)$$

דוגמאות (*)

$\mathbb{Z}^2 = \langle x,y \mid [x,y]\rangle$

$\delta_P(n) \approx c \cdot n^2$




$x^n y^n x^{-n} y^{-n}$

$\pi_1\left(\text{⊙}\right) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]\rangle$ (*) תבורות משטח

$\pi(\text{⊙}) \cong \mathbb{Z}^2$

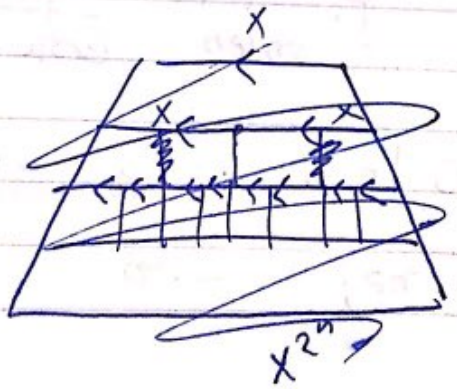
$\delta_P(n) \simeq cn$ הוכח לינארי Dehn פונ' $g=2$ אם

(נניחה מ"ל)

~~Batman~~

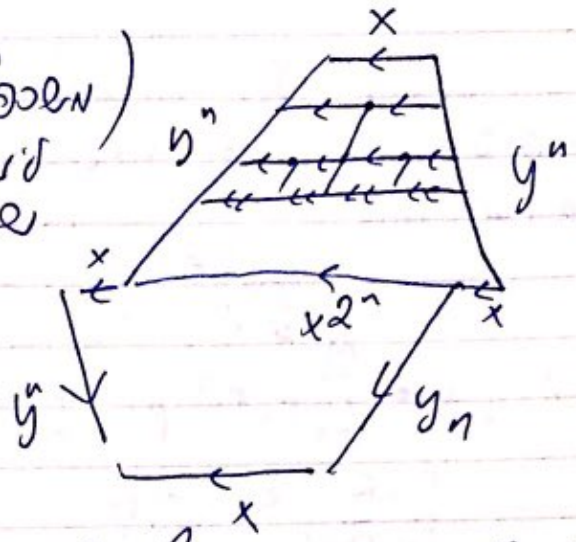
(*) תבורת Baumslag-Solitar

$BS(1,2) = \langle x,y \mid yxy^{-1} = x^2\rangle \quad \delta_P(n) \simeq 2^n$




Scanned with CamScanner

(משפטים בשביל לקבל אוסף לינארי מסוים שבו אלה הם תנאי לכל אלמנט ב-A המשפחה.)




$w = y^n x y^{-n} x y^n x^{-1} y^{-n} x^{-1}$ הגדל לינארי ב-n עבור המלה בגודל $2^n$. כל הוכחות עליון (במקום) הכי מסובכות עדיין w.

⊛ עובדה (סביר-ריקס-קיינג) 2002 נתן לקבל במקום כל פונ' גדולה כפונ' מ-Dehn.

⊛ $\delta_P(n)$ כיורדת $\iff$ גדיר המלה של P משקה

**הגדרה:** $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ נאמר ש- $f\le g$ אם קיים קבוע $c>0$ כך ש- $f(n)\le c\cdot g(cn+c)+cn+c$. $f\simeq g$ אם $f\le g$ ו- $g\le f$.

**דוגמאות:** אם $\alpha_1$ גדול מ-$\alpha_2$, $n^{\alpha_1}\simeq n^{\alpha_2}$ אבל $\alpha_1=\alpha_2$ עדיין $c(cn+c^{\alpha_i})+cn+c$ $(n\ge 1)$ פולינום מעריך $\alpha_1$

$$2^{\sqrt{n}}\ne 2^n\simeq 3^n \quad *$$

**משפט 1:** אם $P_1$ ו- $P_2$ שתי הצגות סופיות של אלמנט חזקה $\Gamma$ אז $S_{P_1}\simeq S_{P_2}$

**סק' בגרף הוכחה:** $P_1=\langle S_1|R_1\rangle$ $P_2=\langle S_2|R_2\rangle$

יהי $c>0$ קבוע שמקיים:

א) כל יצב של $S_2$ שווה (ב- $\Gamma$) לעילה באורך $c$ באיזומורפיזם של $S_1$, ולהפך.

ב) כל עילה יחס ב- $R_2$, כפשר פורבים איזומורפי עילה ב- $F(S_1)$ (דרך הקבלה מ-מ') הוא מעפלה של לכל היצב $c$ יחסים של $R_1$.

Scanned with CamScanner

תבורות small
"קיצוצים קטנים" Cancelation
ליקוד: "תנאי הצמצום הצר"

הרלציות של Dehn (פתרון בעיית המילה):
תהי $P=\langle S|R\rangle$ סופית. נניח שלכל $w\in\langle\langle R\rangle\rangle$
יש שתי מילה (חושבים על w כקבוצה) שמייצגת אותה
לתת מילה של יתר, ואי־יכולה מחוצה היתר.
כלומר – $w=ur_1v$ $\quad r_1,r_2\in R$ $\quad |r_1|>|r_2|$
אזי: $w=ur_1v=\underbrace{ur_1u^{-1}}\cdot\underbrace{ur_2^{-1}v}$
מילה קצרה יותר

אם התנאי הזה מתקיים $\Leftarrow$ יש פתרון (מהיר) לבעיית המילה עבור $P$ $\Leftarrow$ פונקציית Dehn בטוח לחישוב

נטבעה תבורות קיצוצים קטנים מקיימות את התנאי (Lyndon, Greindinger 1960's)

תזכורת: בהינתן הבנייה $P=\langle R|S\rangle$ עם יתרים מצומצמים
בקבוצה מילה $\rho\in F(S)$ נקרא "פיסה" אם היא
מופיעה פעמיים בדיוק, כלומר יש שני יתרים
שונים $r_1,r_2\in R$ כך ש-
$r_1=\rho t_1$
$r_2=\rho t_2$

$\lambda\in(0,1)$
לבנייה $P$ יש תנאי קיצוצים קטנים $C'(\lambda)$
אם כל פיסה $\rho$ מקיימת שאם היא שייכת ליתר $r$ אז $|r|>\lambda|\rho|$

דוגמאות: 1) תבורת משטח $g=2$
$C'(\lambda)$ לכל $\lambda>\frac{1}{8}$

2) תבניות רגולריות הפרמטרים ב- שמשים.

נניח יש מצב - רגולרי באורך n

$\frac{\log n}{n}$

מקיים $C'(\lambda)$ לפי - $\lambda \approx \frac{\log n}{n}$

**משפט:** אם $P$ סופית ומקיימת $C'(\frac{1}{6})$ אז ~~המינימלית~~ הקבוצה של Dehn

$\Leftarrow$ לתבניות מישור עם $g \geq 2$ יש פונ' לינארית ובאורך מינימלי פתרון.

**למה:** יהי $\Delta$ אלמנט משורש שבנוי מ"סך טופולוגי" לאומר שהריבוע יכיל מסך טופולוגי (המשפחה של הפאה הרגילה כולל טופולוגיות מתאימות)

עניין (i) שכל קודקוד מדרגה לפחות 3.

(ii) כל פאה פנימית (~~לא עלה~~ אין קשת מושלמת ברי הפאה הרגילה) יש לה לפחות 6 קשתות

**נסמן** עבור $i=1,2,3$ $b_i$ הוא מס' הפאות שנגזרות בפאה הרגילה לאורך קשת אחת בדיוק (ואולי גם קדקודים) ויש לה עוד $i$ קשתות פנימיות אז $3b_1+2b_2+b_3 \geq 6$.

**הוכחת המשפט בהנחה הלמה:**

~~נניח שיש~~ תהי $\langle\langle R \rangle\rangle \in$ שאינו מצומצמת בקלות

$\Leftarrow C'(\frac{1}{6}) \neq$ ו) המסלול של 3 פיסות של יתם קטן מחצי היתם.

ii) לכל פאה פנימית דיאגרמת ין קמן יש לפחות 7 פיסות שונות

⊛ תהי D דיאגרמת ון קמפן אופטימלית עבור w.
~~[illegible]~~

לניחוק מ-D קדקודים מדרגה 2. אבל אפשר
לבנות קשת יש תיאוריה שבינו מילה ב- F(S)
(לא בהכרח אותו אחת)

⊛ D קשת פנימית היא פסיה לכן באורך $\frac{1}{6}$ היא
⇐ לכל פאה פנימית יש לפחות 7 קשתות

מקרה 1 אם D הוא דיסק טופולוגי, אז הלמה מבטיחה
שיש לפחות פאה חסומה אחת, שנוצרת בשפה ויש לה
≥ 3 קשתות פנימיות ⇐ הקשת החיצונית
היא באורך ≤ מקס יחס.

מקרה 2: D אינם דיסק טופולוגי.
יש דיסקים חיצוניים שמקיפים את שאר הגרף
בדיוק בקדקוד אחד. לפי הלמה יש לפחות 2 פאות
טופולוגיות בפריפריה של הדיסק הזה, ואחת מהן
מכילה לא נוצרת בקדקוד "הלוקה".

## תרגילה 6

תזכורת הגדרה: הבעיה סופית $\langle S \mid R \rangle$ נקראת בעיית
Dehn אם לכל $w \in F(S)$ אם $1 \neq w \in \langle\langle R \rangle\rangle$
אז יש $uv \in R^{\pm}$ כך ש: $|v| < |u|$
$u$-1 את מילה של $w$.

* בהינתן בעיית Dehn יש פתרון מאוד יעיל
לבדיקת המילה בחבורה זו.

משפט: אם הבעיה סופית היא $C'(\frac{1}{6})$ אז היא בעיית
Dehn.

למה: יהי $\Delta$ גלף מישורי סופי שמקיים:
א) טופולוגית הוא דיסק
ב) כל קודקוד מדרגה $\geq 3$
ג) לכל פאה פנימית יש לפחות 6 קשתות