הרצאה 4 - ויטהד AutF$_n$ עבודת ע' דגן נילסון, $GL_n(\mathbb{Z})$ ו- $\mathrm{Aut}F_n$

<u>תזכורות</u>

<u>ויטהד:</u> אם $w\in F_n$ פרימיטיבי, $n\geq 2$! אז בגרף ויטהד של w יש קדקוד מפריד.

$X=\{x_1,\dots,x_n\}$ בסיס של F_n.

הגדרה: נילסון: $N\leq \mathrm{Aut}F_n$

i) תמורה של איברי X

ii) $x_i\to x_i^{-1}$ לכל $k\neq i$ $x_k\to x_k$

iii) $x_i\to x_i x_j$ " " "

הגדרה: ויטהד: $N\subseteq W\subseteq \mathrm{Aut}F_n$

i) תמורות של איברי $X^{\pm1}$ $\left(\sigma(x_i^{-1})=\sigma(x_i)^{-1}\right)$

ii) $x_i\to x_i$ ולכל $k\neq i$ $x^k\to \begin{cases} x_k \\ x_i x_k \\ x_k x_i^{-1} \\ x_i x_k x_i^{-1}\end{cases}$

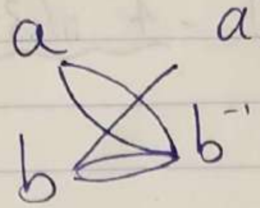
$\langle N\rangle=\langle W\rangle$

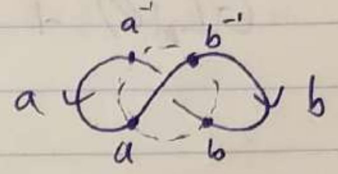
ספציפית: אם $\{v\}\uplus \underset{\neq\emptyset}{Y}\uplus \underset{\neq\emptyset}{Z} = X\cup X^{-1}$ עם $v^{-1}\in Z$

הגדרנו:
$$\phi_{Y,Z,v}(x)=\begin{cases} x & x=v^{\pm1} \\ x & x,x^{-1}\in Y \\ vx & \text{וכו'} \\ xv^{-1} & \\ vxv^{-1} & \end{cases}$$

<u>למה</u> (ויטהד): אם בגרף ויטהד של w אין הפרדה בין Y ל-Z (בפרט, v קדקוד מפריד) אז
$$|\phi_{Y,Z,v}(w)|_c=|w|_c-|E(v,Y)|$$
האורך הציקלי של w

דוגמא: $w = abab^3 \in F_2$





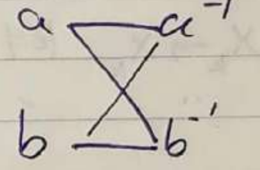
$\phi_{\varphi,z,v}$; $a \to ab^2$, $b \to b$

$|w|_c = 6$

$\phi_{\varphi,z,v}(w) = (ab^{-1})b(ab^{-1})b^3 = a^2b^2$

$| \ |_c = 4$

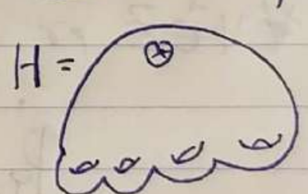
$Wh(a^2b^2)$:



__הוכחת הלמה:__ לשם הפשטות, נחשוב על F_4. ראינו, F_4 = חבורת "המסלולים הסגורים ללא פניות פרסה" בגרף הנ"ל, קוראים לזה החבורה היסודית של הגרף, ומסמנים
$\pi_1($  $, \otimes)$

ניתן לעבות את הגרף לגוף תלת מימדי (עם שפה)

F_4 - מסלול העקומות הסגורות מ-$\otimes$ ל-$\otimes$ בתוך H, עד כדי הצבה רציפה שמקבעת את הקצוות "הומוטופיה".
הסימון: $\pi_1(H, \otimes)$

$H =$ 

אם יש מערכת של ארבעה דיסקים D_1, D_2, D_3, D_4 צריך רק ש:
(i) $\partial H \cap D_i = \partial D_i$
(ii) הם אינם מפרידים. כלומר $H \setminus (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_4)$ הוא קשיר.
אז: $H \setminus \{D_1 \cup \dots \cup D_4\}$ הומיאומורפי לכדור

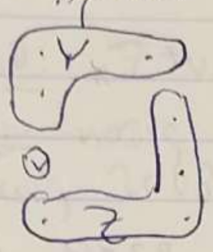
-כל $[\gamma] \in \pi_1(H, \otimes)$ ניתן לשחזר מתוך סדרת החיתוכים עם הדיסקים (לוקחים אבר שלו ~~[illegible]~~ מתעגן דרך דיסק.

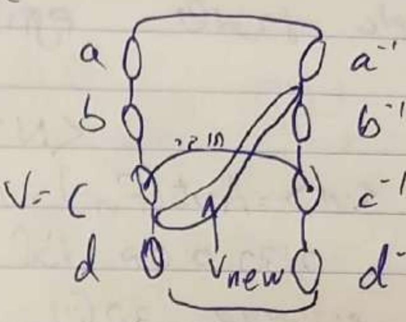
לכן ~~[illegible]~~ מערכת דיסקים זה נותן בסיס. $(F_4 - \text{ל})$

ויטהד: מחליף את אחד הדיסקים (זה שמתחיל לקדקוד ומפריד) בדסק חדש שמפריד בין Y לבין Z.

ננסה לדמיין כשחותכים לאורך הדיסקים:

אם החליקה היא למשל:





$a \to a$

$b \to vb$

$v \to v$

$d \to vdv^{-1}$

מה קורה ל $|w|_c$?

$|w|$ במערכת דיסקים = מס' המעברים דרך דיסקים (הנחה שאין פניות פרסה)

$|w|_c$ מס' המעברים דרך דיסקים אחרי שניתקנו את נק' הבסיס "ומזמני"

(מוקשרים לקיי Y Z)

$|w|_c - |\varphi_{Y,Z,v}(w)| =$ # מס' המעברים ד-V_{old} פחות מספר הפעמים שעובר ד-V_{new} $= \deg v - E(Y \cup \{v\}, Z)$ ד-$Wh(w)$

$= \underbrace{|E(v,Y)| + |E(v,Z)|)}_{\deg v} - |E(v,Z)| = |E(v,Y)|$

הערה: כמסקנה, $\langle w \rangle$ פועלת C-טרנזיטיבית על המלים הפרימיטיביות.

Scanned by CamScanner

$w \in F_n$,

משפט (ויטהד, 1936): ① אם קיים אוטו' $\varphi \in Aut F_n$ שמקצר את $|w|$, אז קיים צעד ויטהד שמקצר.
② אם $w_1, w_2 \in F_n$ שייכות לאותו מסלול של $Aut F_n$, והן מינימליות במסלול, אז אפשר לעבור מ-w_1 ל-w_2 ע"י סדרת צעדי ויטהד שלא מגדילה את המילה (באורך)

מסקנה: יש אלגוריתם שמכריע אם w_1, w_2 באותו מסלול.

משפט: $Aut F_n = \langle N \rangle$

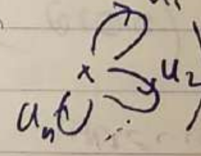
רעיון: מספיק להוכיח $\langle W \rangle = Aut(F_n)$
מספיק להראות לכל בסיס סדור $(u_1, \dots, u_n)$ של F_n
יש סדרת צעדי ויטהד שמעבירים אותו ל-$(x_1, \dots, x_n)$.
"מותר" להפעיל צעדי ויטהד על הבסיס $(u_1, \dots, u_n)$ למשל $\left\{ \begin{array}{l} u_1 \mapsto u_1 u_2 \\ u_2 \mapsto u_2 \end{array} \right.$

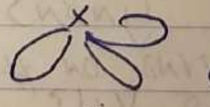
הסבר: אם $\varphi \in Aut F_n$

$$\varphi \circ \underset{\gamma_1}{(a \to ab)} \quad \begin{array}{l} a \to ab \to u_1 u_2 \\ b \to b \to u_2 \\ c \to u_3 \end{array} \qquad \varphi: \begin{array}{l} a \to u_1 \\ b \to u_2 \\ c \to u_3 \end{array}$$

$$\varphi \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \dots \circ \gamma_r = id$$

ולכן: $\varphi = \gamma_r^{-1} \gamma_{r-1}^{-1} \cdot \dots \cdot \gamma_1^{-1} \in \langle W \rangle$

Π_1^{labeld} () $= F_n \iff$ בהינתן $\underline{u_1, \dots, u_n \in F_n}$ $(u_1, \dots, u_n)$ בסיס

מקבל לגרף הלבבה
$\Gamma_x(F_n)$  $\Longleftarrow$

בכל הקודקודים פה מגיעים שתי קשתות עם צבעים שונים.

בכל גרף כזה ניתן לקבל מהו' קסם ל-f_n ע"י בחירת עץ פורש ומתן כיוון שרירותי לכל אחת מ-n הקשתות שמחוץ לעץ הפורש (ובחר על הקשתות הללו)

טענה: א) בתוך אותו גרף, ניתן לעבור בין כל שני בסיסים כאלה ע"י צעדי ויטהד.

ב) אם Γ_2 מתקבל מ- Γ_1 ע"י צעדי קיפול ~~[illegible]~~, עם זנבות שונים, ניתן לבחור "בסיס עצי" ל- Γ_1 ו"בסיס עצי" ל- Γ_2, כך שהשני מתקבל מהראשון ע"י צעד ויטהד.

הוכחת א) נניח שני בסיסים עציים של הגרף Γ: B, B' (T, T'). אם העצים הפורשים זרים, אז ניתן לעבור מ- B ל- B' ע"י תמורה (צעד ויטהד מהסוג הראשון). אם לא, יש לפחות קשת $e \in T_n'$, $e \notin T$

אז יש השת f בתוך החלק המצומצם ציקלית של $\{e\}\cup T$ שאינה שייכת ל-T (אחרת יש מעגל).

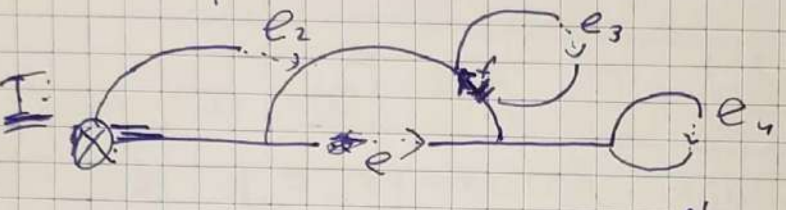
בה"כ נניח $B=(\beta_1,\dots,\beta_n)$
מתאים ל-e.

נעבור בעזרת ו"ה הנ"ל לבסיס:
$B'=(\beta'_1,\beta'_2,\dots,\beta'_n)$
מתאים ל-f בעץ $T\cup\{e\}\setminus\{f\}$

(ונחזור על זה מספר פעמים עד לקבלת T')

נכתוב כל מילה בבסיס החדש ע"י הבסיס הישן:

I:



צעד ו"ה הנ"ל

חדש $\beta'_1=\beta_1$

חדש $\beta'_2=\beta_2$

חדש $\beta'_3=\beta_3\beta_1^{-1}$

חדש $\beta'_4=\beta_1\beta_4\beta_1^{-1}$

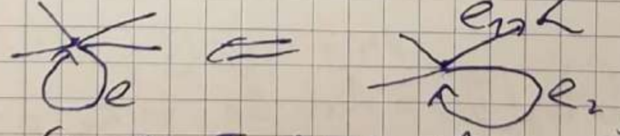
הערה: יש חוסר עקביות בתפקידים של e (אף היא ב-T או T'... בתקווה הרעיון עבר).

הוכחת ב

מקרה 1: היפול הימני הוא מהצורה

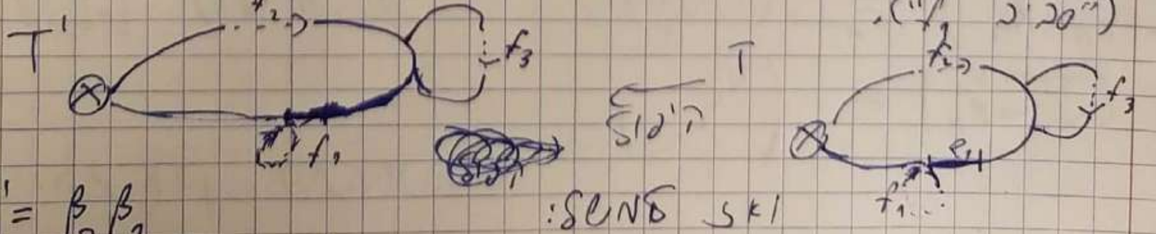
נבחר בגרף הימני (T_1) עץ T שמכיל את e_2, e.
התמונה שלו ב-T_2 היא עץ T' ואם נשמור על הכוון והסדר של הקשתות היתירות נקבל את אותו בסיס.

מקרה 2:



נבחר בגרף הימני עץ פורש T שמכיל את e_1
(כמובן, לא את e_2). התמונה של T בגרף השמאלי היא T'.
אם הקשתות העודפות בגרף הימני הן: $e_2=f_1,\dots,f_n$
והתמונות שלהן בשמאלי הן: $e_2=f'_1,\dots,f'_n$ המקופלת

שוב, הבסיס החדש מתקבל מהבסיס הישן ע"י צעד ו"ה
("סביב f_1").



ואז למשל:

$\beta'_2=\beta_2\beta_1$

(או β_1^{-1}, תלוי בכוון של f_1)

שאלה פתוחה: מה הגידול של $\mathrm{Aut}\,F_n$ ביחס לעצמו?

נילסון / וייל הבדק?

כמה איברים יש בגרף קיילי $Cay(\mathrm{Aut}\,F_n, M)$ בתוך כדור ברדיוס R סביב הראשית?

$$|B_R| \approx \alpha^R \quad (\alpha > 1)$$

הגדרה: בהינתן חבורה G וקבוצה סימטרית S ($S^{-1}=S$), $Cay(G,S)$ הוא הגרף שקודקודיו הם איברי G וקשתות $g \xrightarrow{s} gs$ לכל $g \in G$ ו- $s \in S$.

$\mathrm{Aut}\,F_n$ ו- $GL_n(\mathbb{Z})$

⊛ $[F_n,F_n]$ = חבורת הקומוטטור של F_n = תת"ח שנוצרת ע"י הקומוטטורים = כל המילים שמספר ה-x_i הכולל הוא 0 (כשסופרים x_i^{-1} כ- 1-).

⊛ זו תת"ח נורמלית, קרקטריסטית. כלומר לכל $\varphi \in \mathrm{Aut}\,F_n$,

$$\varphi([F_n,F_n]) = [F_n,F_n]$$

$$\varphi([x_1,y_1][x_2,y_2]) = [\varphi(x_1),\varphi(y_1)][\varphi(x_2),\varphi(y_2)]$$

⊛ $F_n/[F_n,F_n]$ = האבליזציה של $F_n \cong \mathbb{Z}^n$

⊛ מכיוון ש- $[F_n,F_n]$ קרקטריסטית, כל $\varphi \in \mathrm{Aut}\,F_n$ מגדיר אוטומורפיזם $\bar{\varphi}$ על המנה.

אכן, אם H char G, $\varphi \in \mathrm{Aut}\,G$:

$$\bar{\varphi}(gH) = \varphi(g)H$$

מוגדר היטב בבירור כי $\varphi(H)=H$, וקל לוודא שזה הומומורפיזם.

קיבלנו הומומורפיזם:

$$\Phi: \mathrm{Aut}\,F_n \to GL_n(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}_n \cong \mathrm{Aut}\,F_n/[F_n,F_n]$$

$GL_n(\mathbb{Z})$ - מטריצות $n\times n$ מעל השלמים שהפיכות מעל השלמים. זה שקול לדרישה כי הדטרמיננטה היא ± 1.

⊛ Φ על:

$GL_n(\mathbb{Z})$ נוצרת ע"י:

$$\Phi\begin{pmatrix} x_i \to x_i x_j \\ x_k \to x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi\begin{pmatrix} x_i \to x_i^{-1} \\ x_k \to x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

והם אכן בתמונה.

הגרעין של $\bar{\Phi}$: $\mathrm{Inn}(F_n)$ = האוטו' הפנימיים.

תת"ח זו בבירור מוכלת בגרעין (לא משנה את האבליזציה).
הצמדה

כאשר $n \geq 3$: גם $\begin{cases} x_1 \to x_2 x_1 x_2^{-1} \\ x_2 \to x_3 x_2 x_3^{-1} \end{cases}$ בגרעין

(נילסון, 1924): כאשר $n=2$ הגרעין הוא בדיוק $\mathrm{Inn}F_2$, ולכן:

$$\mathrm{Out}(F_2) = \mathrm{Aut}(F_2)/\mathrm{Inn}(F_2) \cong GL_2(\mathbb{Z})$$

באופן כללי: $\bar{\Phi} : \mathrm{Out}(F_n) \twoheadrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$.

פתוח: האם הגרעין של $\bar{\Phi}$ נוצר סופית עבור $n \geq 4$?

הפניות:

Outer-Space (84')

Traintracks (91'+)

פתוחה: האם $\mathrm{Aut}(F_n)$ הוא (T)? ידוע כי F_2 לא (קל) ו- F_3 גם לא (קשה), אבל F_5 כן (מהשנה).