היום
1) המשפט על מרחק - הוכחה
2) cut-vertex של ויטהד
3) יוצרים ל-$\mathrm{Aut}\,F_n$

הרצאה 3

<u>משפט</u>: יהיו $H \le J \le F_n$ תתי-חבורות נ"ס. יש מורפיזם של גרפים ליבה $\eta: \Gamma_x(H) \to \Gamma_x(J)$
נסמן ב-M את הת"ח שמתאימה לתמונה של η.

אזי:

1) $\rho(H,J) = \rho(H,M) + \underbrace{\rho(M,J)}_{rk J - rk M}$

וגם לכל $M=\langle H,m_1,\dots\rangle$

2) נסמן $d=\rho(H,M)$ קיימים $m_1,\dots,m_d \in M$ כך שהוספת m_i ל-$\langle H,m_1,\dots,m_{i-1}\rangle$ שקולה לזיהוי קדקודים + קיפול.

<u>מסקנה</u>: יש אלג' לחישוב $\rho(H,J)$

<u>הוכחה</u>: נסמן $\rho=\rho(H,J)$, לכל ρ-יה ספירה של יוצרים קנוניים j נגדיר את ρ-יית "אורכי הידיות" $(h_1,\dots,h_\rho)$ להיות

$h_i = \begin{cases} |j_i|-|p_i|-|s_i| & \text{[illegible]} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, p_i, s_i - הרישא והסיפא כשמוסיפים את j_i לגרף של $\langle H,j_1,\dots,j_{i-1}\rangle$

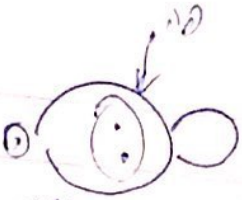
נבחר ρ-יית יוצרים עם ρ-יית אורכי ידיות שהיא מינימלית בסדר הלקסיקוגרפי $(h_1,\dots,h_\rho)$.

<u>המטרה</u>: להראות ש-$(h_1,\dots,h_\rho)$ מורכבת מרצף אפסים ואחריו רצף של מס' חיוביים.

<u>מספיק להראות</u>: אין אף רצף של חיוביים ואז 0 ים.

איפה שני הקדקודים שזיהינו?

מן



לא יתכן, כי

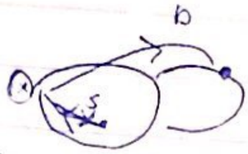
מקרה א'

יכולת לצבוע אותם בשלב הראשון מבין השניים, לקבל

סדרה קטנה יותר לקסיקוגרפית

(ברגע שבוחרים שני קדקודים לצבוע, לא משנה את מקודם ואילך)

מקרה ב'



נחליף את בנריות ב- j_1, j_2, וכך אורך [illegible]

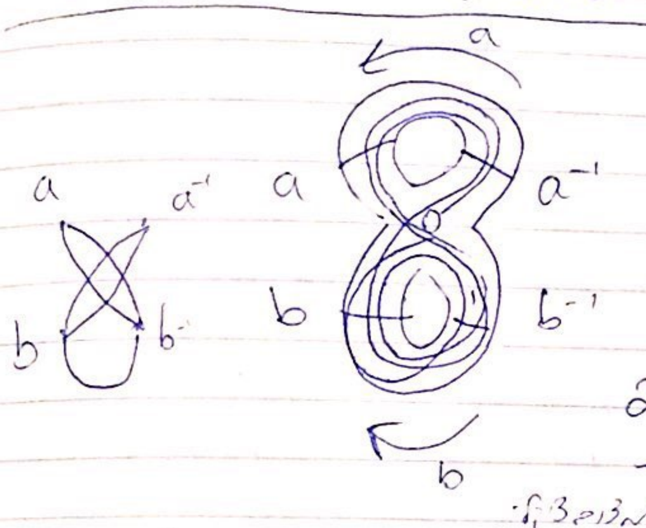
הידית של הצבע הראשון מבין השתיים קצרה יותר.

מקרה ג':

נחליף את בנריות ב- j_1, j_2 וכך אף

בצבע הראשון נקבל ידית קצרה יותר.

משפט הקדקוד המפריד של Whitehead cut-vertex 1936



גרף וייטהד של $w \in F_n$

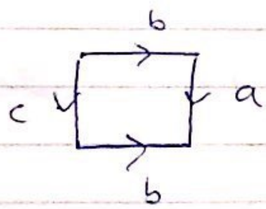
דוגמא: $abab^3 \in F_2$

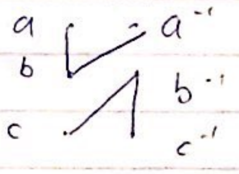
הגדרה: גרף וייטהד של $w \in F_n$ שנסמן $Wh(w)$ הוא גרף עם $2n$ קדקודים (אותיות והופכיים) ושני קשתות

יוצרים של המילה אחד צמודים [illegible]

אם w אינה מצומצמת ציקלית, נצמצם, ואז לכל זוג אותיות עוקבות $x_i x_j$ נחבר קשת $x_i — x_j^{-1}$

למשל: $w = abab^{-1}c^{-1}a^{-1} \Rightarrow bab^{-1}c$





משפט הקדקוד המפריד: אם w פרימיטיבית אז הגרף וייטהד $Wh(w)$ יש קדקוד מפריד, כלומר קדקוד v כך ש- $Wh(w)\setminus\{v\}$ הוא לא קשיר.

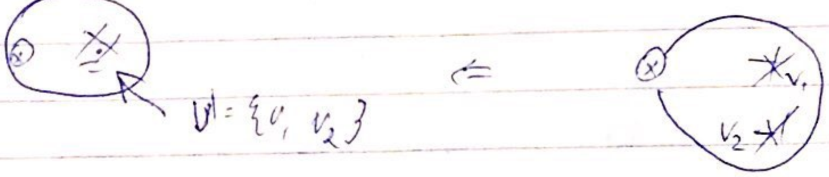
הערות: כולל המקרה ש $Wh(w)$ לא קשיר מלכתחילה

⊗ לא אמת: לדוגמא $abab^3$ אינה פרימיטיבית אבל יש ב- $Wh(w)$ קדקוד מפריד

⊛ בעצם גם אם w מוכלת בגורם חופשי של F_n ($w\in H \lneqq_{ff} F_n$) אז יש קדקוד מפריד

הוכחה: אפשר להגדיר גרף וייטהד של $H\ni w$ ע"י מעקב על המסלול של w בתוך $\Gamma_X(H)$

נניח ש- $w\in H$ ונעשה מזהים שני קדקודים ב- $\Gamma_X(H)$ ומקבלים גרף חדש Γ_2



גרף וייטהד של הקדקוד החדש v' הוא איחוד של v_1 ו- v_2, בפרט אינו קשיר

⊛ אם $\Gamma_2\in$ נ' ומקפלים שתי קשתות עם צלעות שונות, הקדקוד החדש, הקשת שהוא יהוו את שתי הקשתות המקופלות, נותנות קדקוד מפריד בגרף וייטהד.

למה: כאשר מזהים שני קדקודים ב- $\Gamma_X(H)$ ומקפלים, החבורה ~~הנוצרת~~ החדשה J מקיימת
$rk\, J \leq rk\, H + 1$ ושוויון רק אם בכל קיפולים היו שני צלעות שונות.

נניח בה"כ ש-w מכילה את כל האותיות (המשפט שגוי [illegible])

סיום ההוכחה: נניח ש- w פרימיטיבית, לפי המשפט

מתחילת השיעור, ניתן לקבל את F_n מ-גרף ע"י סדרה של זיהוי ו-של קודקודים, הפרחה, קיפול זיהוי כזה, ה-את אלה דואגת. בפרט, בשלב האחרון, F_n התקבלה מזיהוי שני קודקודים בגרף המקורי H וקיפולים על זוגות שונים.
בגלל הקיפול האחרון (או הזיהוי אם לא היו קיפולים) ב-F_m ו-$wh(w)$ קודקוד מפריד. □

* ניתן להגדיר גרף וייטהד לכל גרף אבסטרקטי (קודקודים וקשתות בלי כיוונים וצבעים), ומסלול סגור בגרף (ללא פניות פרסה).

<u>מסקנה 1</u> פרימיטיביים הם נדירים. מילה פרימיטיבית באורך L פרימיטיבית בסיכוי $\to 0$ כאשר $L \to \infty$.

מילים באורך L: $2(2n-1)^L$ בערך $2(2n-1)^L$

* כל מילה שבה יש אות שמופיעה פעם אחת היא פרימיטיבית $\approx (2n-3)^L$

<u>משפט:</u> פרימיטיביים אקראיים מכילים אחת האותיות בדיוק פעם אחת.

<u>$Aut\ F_n$</u>

בהינתן בסיס סדור קבוצה $X=\{x_1,\dots,x_n\}$

$Aut\ F_n \xLeftrightarrow[\text{(ועל?)}]{\text{חח"ע}\ \text{הינו/מה}}$ בסיסים סדורים של F_n

קבוצות יוצרים של $Aut\ F_n$

<u>ברדי נוסף:</u> (i) פרמוטציה על היוצרים
(ii) $x_i \longmapsto x_i^{-1}$

(iii) $x_i \mapsto x_i x_j$ $(i \neq j)$ ולכל $k \neq i$ $x_k \mapsto x_k$

נסמן ב- N את (i), (ii), (iii)

* אנלוגי לפעולות שורה על מטריצות.

משפט (ניסלן, 1924): $\langle N \rangle = Aut\, F_n$ (הוכחה בשיעור הבא)

משפט (ניסלן, 1932): $Aut\, F_n$ מוצגת סופית. (לא נוכיח)

הגדרה: ווייטהד: (i) התמורה של $x^{\pm 1}$ ($2+1$ מקודם)

(ii) לאיזה i, $x_i \mapsto x_i$, ולכל $j \neq i$, $x_j \mapsto x_j$ / $x_j x_i^{-1}$ / $x_i x_j$ / $x_i x_j x_i^{-1}$

נסמן (i)-(ii) ב- W

$\circledast$ $N \subseteq W$

$\circledast$ $\langle N \rangle = \langle W \rangle$

בשיעור הבא נוכיח: $\langle W \rangle = Aut\, F_n$

חזרה לקודם... האלגוריתם של ווייטהד לזיהוי פרימ'

אם v קדקוד מפריד ב- $Wh(w)$ ו- Y, Z שני איחודים זרים של רכיבי קשירות של $Wh(w) \setminus \{v\}$ שאיחודם הוא הכל, כך ש- $v^{-1} \in Z$

נגדיר אוטומורפיזם ווייטהד:

$$\phi_{Y,Z,v}(x) = \begin{cases} x & x, x^{-1} \in Y \\ vx & x \in Y,\ x^{-1} \in Z \\ xv^{-1} & x^{-1} \in Y,\ x \in Z \\ x & x = v^{\pm 1} \\ vxv^{-1} & x, x^{-1} \in Z \end{cases} \qquad x \in X^{\pm 1}$$

למה: אם w מצומצמת ציקלית ו- v הינו קדקוד מפריד, אז $|\phi_{Y,Z,v}(w)| = |w|_c - |E(Y,v)|$

הערה: תמיד ניתן למצוא קדקד מפריד V וחלוקה Z,Y כך שיש
קשתות בין V ל-Y.