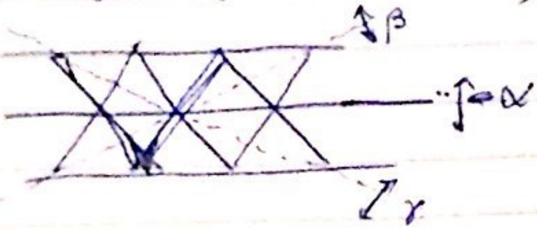
Geometric and Combinatorial group theory - Bridson
מקראות, הקדמה -

דוגמא: חבורת הסימטריות של הריצוף של המישור ע"י משולשים שווי-צלעות
נקרא לחבורה זו Γ_Δ.



טענה: $\Gamma_\Delta = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$

עובדות: $\alpha^2=1,\ \beta^2=1,\ \gamma^2=1$ $\quad (\alpha\gamma)^6=1 \quad (\beta\gamma)^3=1$
נקראו יחסים בחבורה

טענה: העובדות הללו מגדירות את Γ_Δ
מסומן: $\langle \alpha,\beta,\gamma \mid \alpha^2, \beta^2, \gamma^2, (\alpha\beta)^6, (\alpha\gamma)^6, (\beta\gamma)^3 \rangle$

נסביר את פשר הטענה.

חבורות חופשיות

נדגים ע $F_3 = F(\{a,b,c\})$

F_3: החבורה שאיבריה הם המילים המצומצמות ב- $a^{\pm1}, b^{\pm1}, c^{\pm1}$

הפכי: להפוך את הסדר ולהפוך החזקות.

הכפל: שרשור + צמצום, יחידה: המילה הריקה

אסוצ': טענה: סדר הצמצומים לא משנה. [illegible]

משפט: תהי F חבורה ו- $S \subseteq F$, אז שלוש התכונות הבאות שקולות, ואם הן מתקיימות S נקראת בסיס.

1. "אין יחסים": המילה המצומצמת היחידה ששווה ליחידה [illegible] היא המילה הריקה, S
2. לכל איבר ב- F יש הצגה יחידה כמילה מצומצמת ע"י איברי S.
3. תכונה אוניברסלית: לכל חבורה H ולכל פונקציה $\varphi: S \to H$ יש הרחבה יחידה להומומורפיזם $\hat{\varphi}: F \to H$.

$1 \Rightarrow 2$: אם w_1, w_2 שתי מילים מצומצמות שמייצגות את $g \in F$, אז $w_1 w_2^{-1} = e$ וזה לפי 1
$w_1^{-1} w_2$ הצמצום הוא המילה הריקה ולכן $w_1 = w_2$ כמילים.

$2 \Rightarrow 1$ מכך שלכל איבר יש ייצוג יחיד ל-e יש ייצוג
מכך שיש ייצוג יחיד נובע בפרט של חיבור e
ייצוג יחיד.

$2 \Rightarrow 3$ בהינתן $\varphi: S \to H$ יש רק דרך אחת להרחיב
לקבוע $\hat{\varphi}(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_r^{\varepsilon_r}) = \varphi(s_1)^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(s_r)^{\varepsilon_r}$
$\hat{\varphi}$ מוגדר היטב בגלל הייצוג היחיד של כל איבר.
$\hat{\varphi}$ הומומורפיזם כי אם

$g_1 = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_r^{\varepsilon_r}$
$g_2 = t_1^{\mu_1} \cdots t_k^{\mu_k}$

$$g_1 g_2 = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_r^{\varepsilon_r} t_1^{\mu_1} \cdots t_k^{\mu_k}$$

$$\hat{\varphi}(g_1 g_2) = \dots = \hat{\varphi}(g_1) \hat{\varphi}(g_2)$$

נותר להוכיח: $3 \Rightarrow 2$

<u>הגדרה:</u> חבורה ~~תקרא~~ נקראת חופשית אם יש
לה בסיס.

<u>טענה:</u> תהי F חבורה חופשית. לכל בסיס של F אותה
עוצמה. <u>הוכחה:</u> ① יהיו S, T שני בסיסים אינסופיים
אז $|S| = |T| = |F|$
② אם S סופי, $2^{|T|} = 2^{|S|} = |\mathrm{Hom}(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})|$
לכן $|T| = |S|$

<u>טענה "הפוכה":</u> אם F_1 חופשית עם בסיס S_1
ו- F_2 " " " S_2
אז $F_1 \cong F_2$

האוניברסלית-

<u>הוכחה:</u> תהי $\varphi: S_1 \to S_2$ חח"ע ועל, לפי התכונה האוניברסלית
<u>של</u> F_1 יש $\hat{\varphi}: F_1 \to F_2$ שמרחיב
$\hat{\varphi}^{-1}: F_2 \to F_1$ שמרחיב את φ^{-1}
נשים לב ש- $\hat{\varphi}^{-1} \circ \hat{\varphi}: F_2 \to F_1$ הומומו' שמרחיב את φ^{-1}.
הזהות על S ~~יחידות~~ לכן הזהות.
כלומר ϕ ~~הומומו'~~ איזומורפיזם.

<u>מסקנה:</u> לכל עוצמה יש חבורה חופשית יחידה מדרגה העוצמה הזאת, עד כדי איזומורפיזם.

[הגדרה - rank(F) - עוצמת הבסיס של F]

$3 \Leftarrow 2$ $S \subseteq F$ ונניח ש-S מקיימת את התכונה האוניברסלית
נגדיר $\hat{S} = \{\hat{s} \mid s \in S\}$ נגדיר $\hat{F}$ החבורה החופשית עם בסיס $\hat{S}$. ההוכחה של הטענה הקודמת נותנת איזו' בין $\hat{F}$ ל-F שמתאים את S ל-$\hat{S}$.
ה"ייצוג היחיד" ב-$\hat{F}$ גורר "ייצוג יחיד" ב-F.

פשר הסימון $\langle \alpha,\beta,\gamma \mid \alpha^2,\beta^2,\gamma^2,(\alpha\beta)^6,(\alpha\gamma)^6,(\beta\gamma)^2 \rangle$
רוצים את החבורה ה"חופשית ביותר" שנוצרת ע"י 3 יוצרים ושמתקיימים בה שש היחסים.
<u>באופן פורמלי:</u> $\boxed{\text{דרך 1}}$ נגדיר יחס שקילות על המילים שנוצר ע"י הוספה/השמטה של שש היחסים וגם של $\alpha\alpha^{-1}$ וכו'.

$\alpha\beta\beta\alpha \sim \alpha\gamma \sim \alpha\gamma(\beta\gamma)^3$

$\boxed{\text{דרך 2}}$ בהינתן קבוצת יחסים, ניתן לקבל עוד יחסים ע"י: • כפל (שרשור), • הצמדה $w \mapsto g w g^{-1}$, • הפכי

בהינתן קבוצת יחסים $R \subseteq F(S)$ נסמן ב: $\langle\langle R \rangle\rangle$
את הקבוצה הקטנה ביותר של מילים שמכילה את R

שסגורה לכפל, הצמדה והפכי.

טענה ① $\langle\langle R\rangle\rangle$ זו תת"ח נורמלית ב- $F(S)$

② התת"ח הנורמלית שמכילה R ב- $F(S)$ הקטנה ביותר (ביחס להכלה)

③ נוצרת ע"י R וכל הצמדות של איברי R.

הגדרה ההצגה $\langle S|R\rangle$ בהינתן קבוצה S ותת-קבוצה $R \subseteq F(S)$ פירושה החבורה $F(S)/\langle\langle R\rangle\rangle$

טענה חבורה זו "מקסימלית" ביחס למנות" בין כל החבורות שנוצרות ע"י 3 איברים ומקיימות את שלושת היחסים. נגדיר $\varphi: F_3 \to G$

$a \to x$
$b \to y$
$c \to z$

אזי φ הוא על כי x,y,z יוצרים.

שלושת היחסים בקרנל $\Leftarrow R \subseteq \ker\varphi$ אבל ה-$\ker$ נורמלי. ולכן $\langle\langle R\rangle\rangle \subseteq \ker\varphi$, $F_3 \twoheadrightarrow F_3/\ker\varphi \cong G$

משפט איזו 3. $F_3/\langle\langle R\rangle\rangle$

דוגמאות

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^n\rangle$

$ab=ba \quad aba^{-1}b^{-1}=1 \qquad \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \cong \langle a,b \mid (a,b)\rangle$

$F(\{a,b\}) = F_2 \cong \langle a,b \mid \ \rangle$

$F_2 \cong \langle a,b,c \mid c\rangle$

$D_n \cong \langle a,b \mid a^n, b^2, baba\rangle$

$D_n \cong \langle a,b \mid a^2, b^2, (ab)^n\rangle$

הסימטריות של $\mathbb{Z}$ $\quad D_\infty \cong \langle a,b \mid a^2, b^2\rangle$

$\{e\} = \langle a,b,c \mid aba^{-1}=b^2,$
$bcb^{-1}=c^2,$
$cac^{-1}=a^2$

$aba^{-1}=b^2$
$bcb^{-1}=c^2$
~~$cac^{-1}=$~~
$cdc^{-1}=d^2$
$dad^{-1}=a^2$

$\langle a,b,c,d \mid \ldots \rangle$ ← חבורה אינסופית, כלשהי:

במאמר של Dehn מ-1912 שנחשב לאבי התחום
הוא שאל ① בעיית המילה ② בעיית הצמידות
③ בעיית האיזו'

<u>בעיית המילה</u>: האם יש אלגוריתם שבהינתן הצגה סופית של חבורה קובע אם מילה נתונה שווה ליחידה?
לא כריע

<u>בעיית הצמידות</u>: האם יש. שקובע אם שתי מילים נתונות מגדירות איברים צמודים? לא כריע

<u>בעיית האיזו'</u>: בהינתן שתי הצגות, האם החבורות איזו'?
לא כריע.

* ב-1932, Magnus, תלמידו של Dehn: בחבורות <u>חד יחסיות</u> בעיית המילה פתירה.
שתי הבעיות האחרות פתוחות עבור חבורות חד-יחסיות.

<u>תת חבורות של חבורה חופשית</u>

משפט (נילסן שרייר 1920s) תת חבורה של חבורה חופשית היא חופשית.

<u>דוגמא</u>: תת החבורה $H \le F_2$ של כל המילים מאורך זוגי.
מילה כבאות מסלול סגור שמתחיל ומסתיים ב-*

היוצרים של H =
המסלולים ללא פניות u בגרף מהשורש * לשורש.
החבורה החופשית על e_1, e_2, e_3

מסלול במעגל ρ^H ⟵ (e_3,e_2,e_3) ; כל אחד ב-e מסמן
לאן שהולכים. נסמן e_i, ואם הולכים נגד הכיוון
אז נסמן e_i^{-1}

$a^{-1}ba^{-1}b \longmapsto e_1e_2^{-1}e_3e^{-1}e_2$

$b^2 \longmapsto e_3$

ומכאן שיש ניתן לולאה לכל בחבורה היסודית
ומסלול יחיד לצמת

אם מסלול מצומצם אחד שאחר הגרף
על המסלול הקצר, ורק לבין מעגל רק
באותו הכיוון

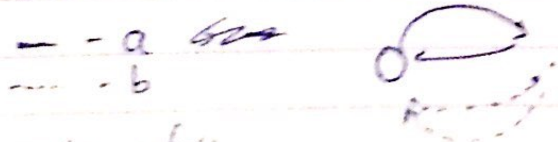
הוכחות מסקנה (לפון-שרייר) נתונה $H \le F$
מגדיר גרף (גרף שרייר): קודקודים - מחלקות הקוסטים H
המסלול - במחלקה H (בסיס S של F)
הקשתות $Hg \xrightarrow{a} Hga$
לכל מחלקה Hg ולכל $s \in S$ יש קשת מ-Hg
ל-Hgs $Hg \xrightarrow{s} Hgs$ עם תווית s.

נבחר עץ פורש T בתוך הגרף. ξ: קשתות שאינן
ב-T עם כיוון שרירותי
היוצרים של H = המסלולים הסגורים בגרף
המתאימים לצלע ללא פירוק- ($\longleftrightarrow$)

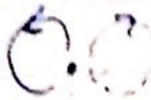
* למשל: קודקוד התאמה חזקה

$\{H \le F_2\}$ ⟷ {גרפים קשירים עם שורש
מכל קודקוד מגיעה ויוצאת
קשת a ו-b לכל קודקוד
יש a יוצא, a נכנס, b יוצא ו-b נכנס}

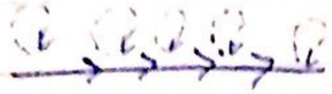
<u>דוגמאות</u>



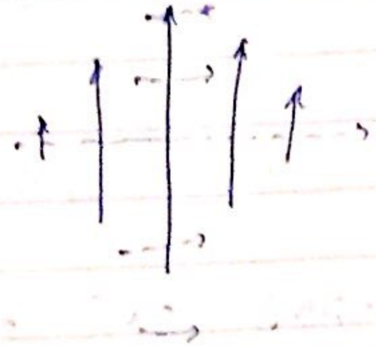
ואז רצוי

F_2 

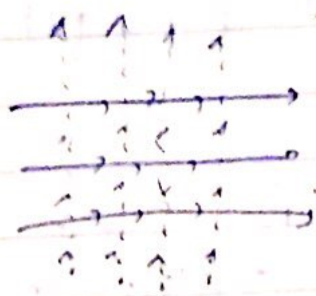
$\{w\in F_2 \mid$ e מספר a-ים שווה למספר a^{-1}-ים $\}$



$\{e\}$



$\{w\in F_2 \mid \#a=\#a^{-1},\ \#b=\#b^{-1}\}$



<u>מסקנה:</u> לכל n ~~טבעי~~ טבעי וגם "$n=\infty$" קיים, יש שיכון של F_n בתוך F_2.

<u>שאלה:</u> איך אפשר לדעת אם איבר $w\in F_2$ שייך לאחד מהם?