פונקציות ממשיות

ארזים ©

20 בדצמבר 2016

תרגיל תהיינה μ, ν מידות בורל סיגמא סופיות. קבעו נכון או לא נכון:

1. נניח כי לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$. אזי $\mu \equiv \nu$.
2. נניח כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mu([t,t+1]) = \nu([t,t+1])$. אזי $\mu \equiv \nu$.

פתרון

1. נכון. אם $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$, אזי ממשפט קרתאודורי, משום שהסיגמא אלגברה של בורל נוצרת על ידי האלגברה של טעים סגורים, היינו מקבלים $\mu \equiv \nu$.
משום שהרציונאליים צפופים בממשיים, קיימות $a_n \to a, b_n \to b$ כך שמתקיים $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{Q}$. נראה שלכל $a < b \in \mathbb{R}$, מתקיים $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$.
נניח בשלילה שאין שוויון ונניח בלי הגבלת הכלליות
$$\mu([a,b]) = \nu([a,b]) + \varepsilon > \nu([a,b])$$
ראינו בתרגול קודם שלכל $\delta > 0$ ניתן לקחת I_1, I_2 קטעים סגורים המקיימים
$$\mu((a,b)\,\Delta I_1), \nu((a,b)\,\Delta I_2) < \delta$$
נניח שמתקיים $I_1, I_2 \subseteq (a,b)$. קיימים $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים
$$I_1 \cup I_2 \subseteq [a_n, b_n] \subseteq (a,b)$$
בפרט מתקיים
$$\mu(a,b) < \mu((a_n,b_n)) + \delta = \nu(a_n,b_n) \leq \nu(a,b) + \delta$$
אבל אם $\delta < \varepsilon$ נקבל סתירה.
אם הקטעים לא מוכלים, נניח כי I_2 אינו מוכל. נבחר $\tilde{I_2}$ כך שמתקיים
$$\mu\left((a,b)\,\Delta\tilde{I_2}\right) < \delta$$
$$\tilde{I_2} = [a_n, b_n], a_n, b_n \in \mathbb{Q}$$

איך נעשה זאת? אם $[a,b] \subseteq \tilde{I}_2$, כמו קודם, נבחר a_n, b_n בתחום $(a,\tilde{a})$, $\left(b,\tilde{b}\right)$.
נמשיך על ידי חלוקה למקרים.
סך הכל נקבל כמו קודם:

$$\mu(a,b) \le \cdots \le \nu(a_n,b_n) + \delta < \nu(a,b) + 2\delta$$

ואז על ידי בחירת $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ נקבל סתירה.

2. לא נכון. נבחר $f_1(x) = |\sin(2\pi x)|, f_2(x) = |\cos(2\pi x)|$, ונגדיר

$$\mu_j([a,b]) = \int_a^b f_j(x)\,\mathrm{d}(x)$$

אפשר להרחיב עם קרתאודורי והכל יוצא בסדר. לכל $t \in \mathbb{R}$, משום שיש מחזור 1 לשתי הפונקציות, נקבל

$$\int_t^{t+1} f_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_j(x)\,\mathrm{d}x$$

ואכן נקבל

$$\int_0^1 f_j(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$

מצד שני, עבור $I = \left[0, \frac{1}{8}\right]$ נקבל

$$\mu_1(I) = \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} < \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \mu_2(I)$$

אולי המספרים לא נכונים. בפרט, $\mu_1 \ne \mu_2$.

1 מדידות

נסמן בתור B קבוצה לא מדידה בתוך $\mathbb{R}$ (בנינו בהרצאה).

תרגיל בנו קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^2$ מדידה כל שעבור x מסויים $A_x = \{y \mid (x,y) \in A\}$ איננה מדידה.

פתרון נגדיר $A = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in B\} \cap [0,1]^2$. נראה כי A זניחה ובפרט מדידה.
נקבע $\varepsilon > 0$ ונגדיר את הקבוצות $E_n(\varepsilon) = \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$, עבור $q_n \in \mathbb{Q}$

מניה כלשהי. נגדיר $E_\varepsilon = \bigcup E_n(\varepsilon)$. כמובן שזו קבוצה מדידה, שמכילה את A, ומתקיים

$$m(E_\varepsilon) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n(\varepsilon)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} < 2\varepsilon$$

לפי ההגדרה A זניחה, אבל ההטלה תיתן את $B \cap [0,1]$, שאינה מדידה.

תרגיל תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ רציפה. האם לכל A מדידה $f(A)$ גם מדידה?

פתרון לא. ראינו עכשיו ־ ניקח את $f(x,y) = y$.

הערה 1.1 בתרגיל בית ראינו שאם f מדידה, g רציפה, אזי $g \circ f$ מדידה. ההיפך לא נכון ־ נראה דוגמא נגדית בשבוע הבא.