

פונקציות ממשיות

© ארזים

13 בדצמבר 2016

תרגיל הוכיחו כי "החלפת משתנה לינארית היא חוקית". כלומר, בהינתן $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית לבג, לכל $a > 0, b \in \mathbb{R}$ נגדיר $Tx = ax + b$, ואז יתקיים

$$\int f(Tx) dm(x) = \frac{1}{a} \int f(x) dm(x)$$

פתרון נפתור בשלבים.

1. אינדיקטורים:

- נגדיר את המידה $\nu(A) = \mu(T^{-1}A)$ זו מידה, ומשום משום שההעתקות T, T^{-1} רציפות, זו אותה סיגמא אלגברה.
- נראה שעל אינטרוולים מתקיים $\nu(I) = \frac{1}{a}m(I)$

$$\nu(I) = m(T^{-1}I) = \frac{\beta - b}{a} - \frac{\alpha - b}{a} = \frac{q}{a}(\beta - \alpha) = \frac{1}{a}m(I)$$

- $T^{-1}I_1 \cap T^{-1}I_2 = \emptyset$ אם $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ולכן אם $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ אז גם $T^{-1}I_1 \cap T^{-1}I_2 = \emptyset$ לכן השוויון שהראינו מתקיים גם לאיחודים זרים סופיים של קטעים. נגדיר \mathcal{B} להיות הסיגמא אלגברה שנוצרת על ידי האלגברה הנוצרת על ידי קטעים. ממשפט קרתאודורי, השוויון שראינו מתקיים לכל קבוצה מדידה. לכן נקבל כי

$$\int 1_A(Tx) dm(x) = \int 1_{T^{-1}A}(x) dm(x) = m(T^{-1}A) = \frac{1}{a}m(A) = \frac{1}{a} \int 1_A(x) dm(x)$$

ולכן עבור אינדיקטורים סיימו.

2. עבור פונקציות פשוטות,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$$

אזי מתקיים

$$\int \varphi(Tx) = \sum_{j=1}^n a_j \int 1_{A_j}(Tx) = \sum_{i=1}^n a_j \frac{1}{a} \int 1_{A_j}(x) = \frac{1}{a} \int \varphi dm$$

3. עבור פונקציות אינטגרביליות כלליות, ניקח f אינטגרבילית. fT מדידה (כי TI אינטרוול לכל אינטרוול I). ניקח $\varphi \leq f$ פשוטה. היות וההעתקות T, T^{-1} מונוטוניות עולות ממש, $\varphi T \leq fT$. אז בעצם יש שוויון:

$$\int fT(x) dm = \sup_{\varphi \leq fT} \int \varphi dm = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi T dm(x) = \frac{1}{a} \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi dm = \frac{1}{a} \int f dm$$

תרגיל תהי A מדידה עם $m(A) > 0$. נסמן

$$d_A(I) = \frac{m(I \cap A)}{m(I)}$$

הראו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים אינטרוול I עבורו $d_A(I) > 1 - \varepsilon$

פתרון נקבע $\varepsilon > 0$ (בלי הגבלת הכלליות $\varepsilon < \frac{1}{10}$). משום שאנחנו עובדים עם הסיגמה אלגברה של בורל, מתרגיל בית קיימת קבוצה

$$E = \biguplus_{j=1}^N I_j$$

עבור אינטרוולים זרים כך שמתקיים $m(A \Delta E) < \varepsilon m(A)$ (בלי הגבלת הכלליות $m(A) < \infty$ אזי

$$\frac{m(E \cap A)}{m(E)} = \frac{m(E) - m(E \setminus A)}{m(E)} = 1 - \frac{m(E \setminus A)}{m(E)} \geq 1 - \frac{m(A \Delta E)}{m(E)} \geq 1 - \frac{\varepsilon m(A)}{(1 - \varepsilon) m(A)} > 1 - 2\varepsilon$$

במעבר * השתמשנו בכך שמתקיים

$$m(A) = m(E \cap A) + m(E^c \cap A) \leq m(E) + m(A \Delta E) \leq m(E) + \varepsilon m(A)$$

$$m(E) > (1 - \varepsilon) m(A)$$

נקבל בסך הכל כי

$$(1 - 2\varepsilon) m(E) \leq m(E \cap A) = \sum_{j=1}^N m(A \cap I_j) = \sum_j \frac{m(A \cap I_j)}{m(I_j)} m(I_j)$$

$$(1 - 2\varepsilon) \sum_j I_j = (1 - 2\varepsilon) m(E) \leq \sum_j c_j m(I_j)$$

לכן קיים j_0 עבורו $1 - 2\varepsilon \leq c_{j_0}$, ואז I_{j_0} מקיים $d_A(I_{j_0}) > 1 - 2\varepsilon$

תרגיל תהי A מדידה עם $m(A) > 0$. אזי הקבוצה

$$A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$$

מכילה אינטרוול לא מנוון סביב 0.

פתרון נראה סקיצה כללית, אם לא נספיק להוכיח הכל יישארו חלקים כתרגילי בית. יהי I כך שמתקיים $d_A(I) > 0.9999$. נראה שלכל $\varepsilon < \frac{m(I)}{3}$, נראה כי $\varepsilon \in A - A$. כיצד? נקבע ε שכזה ונניח בשלילה כי $\varepsilon \notin A - A$. נחלק את I לאינטרוולים באורך ε (אולי חוץ מהאחרון). לכל $x \in I_1$, כלומר באינטרוול השמאלי ביותר מבין אלה, נגדיר $a_j(x) = x + \varepsilon j$. באינדוקציה, $a_j(x) \in I_{j+1}$ לכל $1 \leq j \leq N-1$, כאשר N הוא כמות האינטרוולים הללו. אם $A_j(x), A_{j+1}(x) \in A$ אזי

$$\varepsilon = A_{j+1}(x) - A_j(x) \in A - A$$

בסתירה. לכן לכל היותר חצי מהאיברים נצאים בתוך A , לכל $x \in I_1$ נגדיר

$$g_j(x) = 1_A(a_j(x))$$

תרגיל בית - להוכיח שזה מדיד. כעת, נקודתית,

$$\sum_{j=1}^N g_j(x) \leq \frac{N}{2}$$

כמובן מתקיים

$$m(A \cap I) = \sum_j m(A \cap I_j) = \sum \int 1_{A \cap I_j}(y)$$

כעת, $y \in I_j \cap A$ אם ורק אם קיים ויחיד $x \in I_1$ עבורו $x + \varepsilon(j-1) = y$, כלומר אם ורק אם $g_{j-1}(x) = 1$. לכן

$$m(A \cap I) = \sum_j \int_{I_1} g_j(x) \leq \int_{I_1} \frac{N}{2} dm = \varepsilon \cdot \frac{N}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{m(I)}{\varepsilon} + 1 \right) < 0.6m(I)$$

בסתירה לצפיפות $d_A(I)$.