<u>פונקציות ממשיות</u>

© ארזים

29 בנובמבר 2016

1 אינטגרלים

1.1 תזכורת

הגדרה 1.1 תכונה P מתקיימת כמעט בכל מקום אם קיימת קבוצה $N \in \mathcal{B}$ עבורה $m\left(N\right)=0$ ולכל $x \notin N$, x מקיים את P.

הערה 1.2 N לא יחידה בנוסף, המידה m קובעת אילו תכונות מתקיימות כמעט בכל מקום.

דוגמאות

1. במידת האפס, הכל מתרחש כמעט תמיד.
2. במידת בורל־לבג, כמעט כל $x \in \mathbb{R}$ הוא אי רציונאלי.
3. ניקח

$$\begin{aligned} m &= \delta_0 \\ m\left(A\right) &= \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{aligned}$$

   אז כמעט כל נקודה היא ראציונאלית.

4. ניקח $\mathbb{Q}=\left\{ r_n \right\}$ מנייה של הרציונאליים ונגדיר

$$m\left(\left\{ r_n \right\}\right)=\frac{1}{2^n}$$

   ואפס אחרת.

הגדרה 1.3 תהי $f:X\to\mathbb{R}_+$ סדרה של פונקציות מדידות. נאמר כי $f_n \xrightarrow{a.e} f$ (מתכנסות כמעט בכל מקום) אם קיימת קבוצה $N \in \mathcal{B}$ עבורה $m\left(N\right)=0$, ולכל $x \notin N$ מתקיים $f_n\left(x\right)\to f\left(x\right)$.

בפרט, אם $f_n \to f$ נקודתית אז גם כמעט בכל מקום.
גם זה תלוי במידה.

הגדרה 1.4 $f : X \to \mathbb{R}_+$ נקראת פשוטה אם

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$$

כאשר $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, $A_j \in \mathcal{B}$.

הערה 1.5 תמיד ניתן לבחור את A_j זרות (תרגיל).

הגדרה 1.6 לפונקציה פשוטה מגדירים

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

ראינו כי אם f מדידה אז קיימת $f_n \nearrow f$ ואז

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$$

בתרגילים הבאים m היא מידת בורל־לבג.

תרגיל

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n} & x \in [n, n+1) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

חשבו את $\int f \, \mathrm{d}m$.

פתרון נגדיר

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-n} 1_{[k,k+1)}$$

בפרט f_n פשוטות וכל $f \nearrow f_n$. לכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית מספיק לחשב את $\int f_n$. אזי

$$\int f_n = \int \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} 1_{[k,k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \int 1_{[k,k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - 2^{-k} \to 1$$

תרגיל תהי $\{r_n\} = \mathbb{Q}$ מנייה של הרציונאליים. נגדיר

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|x - r_n|}} 1_{[r_n - 1, r_n + 1]}(x)$$

הראו כי $f < \infty$ כמעט בכל מקום.

פתרון נראה כי $\int f < \infty$ ונשתמש במשפט מהכיתה. נסמן $I_n = [r_n - 1, r_n + 1]$. נגדיר

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2\sqrt{|x - r_n|}} 1_{I_n}(x)$$

כמובן $f_n \nearrow f$ ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית $\int f = \lim \int f_n$. במידת בורל אינטגרל הוא למעשה אותו אינטגרל שלמדנו בחדוא 2 (כן זו רמאות אנחנו יודעים):

$$\int f_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \int_{r_n-1}^{r_n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t - r_n|}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} c \to c \cdot \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

תרגיל תהי $f \geq 0$ מדידה ואינטגרבילית. אזי

$$\int f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_0^{\infty} \mu(\{x \mid f(x) \geq t\})\, \mathrm{d}t$$

פתרון שלב ראשון: נניח כי $f \leq 1$. נגדיר

$$f_n(x) = \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}$$

זהו קירוב מלמטה של f על ידי מדרגות בגובה 2^{-n}. תרגיל - $f_n \nearrow f$. רמז - לכל $k \in \mathbb{N}$, $k\lfloor x \rfloor < \lfloor kx \rfloor$.
כעת נעריך את $\int f_n$.

$$\begin{aligned}
\int f_n\, \mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j}{2^n} \mu\left(\left\{f_n = \frac{j}{2^n}\right\}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{k=0}^{j-1} \mu\left(\left\{f_n = \frac{j}{2^n}\right\}\right) = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=k+1}^{2^n} \mu\left\{\left(f_n = \frac{j}{2^n}\right)\right\} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \mu\left(\left\{f_n \geq \frac{k}{2^n}\right\}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \mu\left(\left\{f \geq \frac{k}{2^n}\right\}\right)
\end{aligned}$$

המעבר האחרון נובע משום שבחרנו מדרגות 2^n ואת כל הערכית שמקבלת f בין $\frac{k+1}{2^n}$ לבין $\frac{k}{2^n}$ "הגדרנו" אל $\frac{k}{2^n}$.
נסמן $\varphi_f(t) = \mu(\{x \mid f(x) \geq t\})$. φ_f מונוטונית יורדת, ולכן אינטגרבילית רימן, ולכן השוויון שלמעלה ממשיך והופך להיות:

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \varphi_f\left(\frac{k}{2^n}\right) \to \int_0^1 \varphi_f(t)\, \mathrm{d}t$$

כמובן

$$\int f\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, \mathrm{d}\mu = \lim \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \varphi_f\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_0^1 \varphi_f(t)\, \mathrm{d}t$$