

פונקציות ממשיות

© ארזים

8 בנובמבר 2016

1 סיגמא אלגבראות

הגדרה 1.1 יהי X מרחב (טופולוגי מטרי), ותהי $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. \mathcal{F} תקרא אלגברה אם מתקיימים הבאים:

$$1. \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$2. A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$3. A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

הגדרה 1.2 אם תכונה 3 מקודם מוחלפת בתכונה

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

אזי \mathcal{F} נקראת σ -אלגברה.

הערה 1.3 אם X סופי, אזי כל אלגברה היא σ -אלגברה.

דוגמא

1. לכל מרחב X , 2^X היא σ -אלגברה.

2. לכל מרחב X , $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$ היא σ -אלגברה.

3. $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ נוכיח:

$$(א) \emptyset \in \mathcal{F}$$

(ב) תהי $A \in \mathcal{F}$. אם $A \in \{\emptyset, X\}$, ברור שגם $A^c \in \mathcal{F}$. אם $A = \{1\}$ אזי $A^c = \{2, 3\} \in \mathcal{F}$, ולהיפך.

(ג) יהיו $A, B \in \mathcal{F}$. אם $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$ אזי ברור כי $A \cup B \in \mathcal{F}$. אחרת, $A \cup B = X \in \mathcal{F}$.

בסך הכל הוכחנו שזו אלגברה, אבל X סופית, ולכן זו σ -אלגברה.

4. $X = \mathbb{R}$ (או כל אינסופי), $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$. ברור שמתקיים $\emptyset \in \mathcal{F}$, וכן שאם $A \in \mathcal{F}$ אז גם $A^c \in \mathcal{F}$. תהינה $A, B \in \mathcal{F}$. נחלק למקרים:

(א) $|A|, |B| < \infty : |A \cup B| \leq |A| + |B| < \infty$, לכן $A \cup B \in \mathcal{F}$.
 (ב) אם אחת מהן אינסופית, בלי הגבלת הכלליות זו A . נשים לב כי

$$|(A \cup B)^c| = |A^c \cap B^c| \leq |A^c| < \infty$$

כאשר האי שוויון האחרון נובע מכך שמתקיים $A \in \mathcal{F}$ וגם A אינסופית.
 קיבלנו כי \mathcal{F} היא אלגברה, אבל היא אינה σ -אלגברה - למשל נסמן $A_n = \{-n, n\}$, ונקבל

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z} \notin \mathcal{F}$$

תרגיל יהיו X, Y מרחבים, $g : X \rightarrow Y$. תהי $\mathcal{F}_y \subseteq 2^Y$ σ -אלגברה. הראו כי $\mathcal{F}_x = \{g^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}_y\}$ גם היא σ -אלגברה.

פתרון נראה את התכונות:

- $\emptyset \in \mathcal{F}_y \iff \emptyset \in \mathcal{F}_x$. אבל \mathcal{F}_y σ -אלגברה, ולכן זה מתקיים.
- נניח כי $A \in \mathcal{F}_x$. אזי קיימת $B \in \mathcal{F}_y$ עבורה $A = g^{-1}(B)$. נזכור שמתקיים גם $A^c = (g^{-1}(B))^c = g^{-1}(B^c)$ וכעת $B^c \in \mathcal{F}_y$, שכן \mathcal{F}_y σ -אלגברה, ולכן גם $A^c \in \mathcal{F}_x$.
- תהינה $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}_x$. אזי לכל n קיימת $B_n \in \mathcal{F}_y$ עבורה $A_n = g^{-1}(B_n)$ ועתה

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(B_n) = g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

האיחוד הזה הוא איבר של \mathcal{F}_y , ולכן האיחוד של $\{A_n\}$ הוא איבר של \mathcal{F}_x .

תרגיל תהינה $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ σ -אלגברות. אז $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ היא σ -אלגברה.

פתרון

- $\emptyset \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ ולכן $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- אם $A \in \mathcal{F}$ אזי $A \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ ולכן $A^c \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, כלומר $A^c \in \mathcal{F}$.
- אם $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$, אזי $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, כלומר $\bigcup A_n \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ ולכן $\bigcup A_n \in \mathcal{F}$.

שאלה למחשבה - מה לגבי איחוד?

הגדרה 1.4 יהי X מרחב, ותהי $A \subseteq 2^X$. נגדיר

$$\sigma(A) = A^*$$

להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי A , שהיא חיתוך כל הסיגמא אלגברות של X שמכילות את A .

דוגמאות תהי $A = \{[1, 2], [0, 1]\}$.

1. $X = [0, 2]$:

$$\sigma(A) = \{\emptyset, X, [0, 1], (1, 2], [1, 2], [0, 1), \{1\}, X \setminus \{1\}\}$$

2. $X = \mathbb{R}$: להשלים כתרגיל, יוצא המון קבוצות.

תרגיל נסמן

$$\mathcal{A}_0 = \{[a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid \{A_n\} \subseteq \mathcal{A}_0 \right\} \cup \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid \{A_n\} \subseteq \mathcal{A}_0 \right\}$$

הראו כי \mathcal{A}_0 σ -אלגברה.

פתרון נראה את התכונות.

1. $I_1 = [0, 1] \in \mathcal{A}_0, I_2 = [2, 3] \in \mathcal{A}_0$ ואז $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{A}$.

2. ראשית נשים לב כי $(a, b) \in \mathcal{A}$:

$$(a, b) = \bigcup_{i=1}^n \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$$

כעת, תהי $A \in \mathcal{A}$. אם $A = [a, b]$, אזי

$$[a, b]^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([a - n - 1, b - n] \cup [b + n, b + n + 1]) \cup (a - 1, a) \cup (b, b + 1) \in \mathcal{A}$$

אם A היא איחוד בן מניה של קטעים סגורים, נכתוב

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

ואז מקבלים

$$A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]^c \in \mathcal{A}$$

המקרה השלישי, בוא A היא חיתוך בן מניה של קטעים סגורים, הוא דומה, ונשאיר אותו כתרגיל.

3. ברור מההגדרה כי \mathcal{A} סגורה לאיחודים בני מניה.

דרך נוספת להוכיח את העניין היא להשתמש בשפט ההחלקה המונוטונית.