פונקציות ממשיות

ארזים ©

18 בדצמבר 2016

1 מספר השלמות

1.1 מידת סטילטיס לפי מונוטוניות

הגדרה 1.1 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה במובן החלש. נסמן

$$f_+(x)=\lim_{t\to x^+}f(t)$$
$$f_-(x)=\lim_{t\to x^-}f(x)$$

מתקיים

$$f_-\le f\le f_+$$

כמו כן $f_\pm$ מונוטוניות עולות במובן החלש. כמו כן, f_+ רציפה מימין.

מכאן מקבלים, על ידי התייחסות לפונקציה $f_+-f_+(0)$, שקיימת מידת בורל יחידה μ עם $\mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\mu((a,b])=f_+(b)-f_+(a)$$

מסמנים מידה זו $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}f$, ולכן מסמנים

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

הערה 1.2 מתקיים

$$\lim_{t\to x^-}f_+(t)=f_-(x)$$

מסקנה 1.3 מתקיימים הבאים:

$$\mu\left([a,b]\right)=f_{+}\left(b\right)-f_{-}\left(a\right)$$
$$\mu\left((a,b)\right)=f_{-}\left(b\right)-f_{+}\left(a\right)$$
$$\mu\left([a,b)\right)=f_{-}\left(b\right)-f_{-}\left(a\right)$$

1.2 מידות שלמות

טענה 1.4 תהי (X,Σ,μ) מידה שלמה. תהי $\Sigma'\subseteq\Sigma$ תת סיגמא אלגברה. נסמן $\mu'=\mu\mid_{\Sigma'}$ ואז (X,Σ',μ') מידה. תהי $\left(X,\overline{\Sigma'},\overline{\mu'}\right)$ ההשלמה שלה. אזי $\overline{\Sigma'}\subseteq\Sigma$, $\overline{\mu'}=\mu\mid_{\overline{\Sigma'}}$.

הוכחה: תהי $E\in\overline{\Sigma'}$. אזי קיימות $B\subseteq E\subseteq A$ כך שמתקיים $A,B\in\Sigma'$, $\mu'\left(B\backslash A\right)=0$. אז מתקיים $\overline{\mu'}\left(E\right)=\mu'\left(A\right)$. נובע כי $A,B\in\Sigma$ וכן $\mu\left(B\backslash A\right)=0$. מאחר והמידה μ שלמה נובע כי $E\in\Sigma$. לבסוף,

$$\mu\left(E\backslash A\right)\leq\mu\left(B\backslash A\right)=0$$

ולכן

$$\mu\left(E\right)=\mu\left(A\right)+\mu\left(E\backslash A\right)=\mu\left(A\right)=\mu'\left(A\right)=\overline{\mu'}\left(E\right)$$

■

1.3 על רגולריות מבפנים

הגדרה 1.5 יהי X מרחב מטרי. קבוצה מסוג F_{σ} הוא איחוד בן מניה של קבוצות סגורה.

הערה 1.6 תהי $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ קבוצה מסוג F_{σ}. אזי יש תיאור של A בתור איחוד בן מניה של קבוצות סגורות וחסומות.

אכן, אם F סגורה אזי מתוך

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(F\cap\left[-n,n\right]^{d}\right)$$

נובע כי F איחוד סדרה בת מניה של קבוצות סגורות וחסומות.

טענה 1.7 תהי $\left(\mathbb{R}^{d},\Sigma,\mu\right)$ מידה כך שמתקיים $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\subseteq\Sigma$, וכן μ סופית על קבוצות מדידות חסומות. תהי $E\in\Sigma$ רגולרית מבפנים (כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיימת $F\subseteq\mathbb{R}^{d}$ סגורה עבורה $F\subseteq E$ וכן $\mu\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$). אזי:

1. קיימת $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ מסוג F_{σ} כך שמתקיים $A\subseteq E$ וכן $\mu\left(E\backslash A\right)=0$.
2. $\mu\left(E\right)=\sup\left\{ \mu\left(F\right)\mid F\subseteq E,\,F\text{ is closed}\right\}$.
3. $\mu\left(E\right)=\sup\left\{ \mu\left(K\right)\mid K\subseteq E,\,K\text{ is closed and bounded}\right\}$.

הוכחה:

1. לכל n קיימת $F_n \subseteq E$ סגורה עבורה $\mu(E \backslash F_n) < \frac{1}{n}$, ואז נקח $A = \bigcup_n F_n$.

2. יהי $\varepsilon > 0$. תהי $F \subseteq E$ סגורה עם $\mu(E \backslash F) < \varepsilon$. אזי $\mu(E) = \mu(F) + \mu(E \backslash F) \leq \mu(F) + \varepsilon$. אם $\mu(E) \leq \infty$ נובע כי $\mu(F) = \infty$ ולכן 2 נכון. אם $\mu(E) < \infty$, אזי

$$\mu(F) > \mu(E) - \varepsilon$$

ושוב נובע 2.

3. נובע מהסעיף הקודם יחד עם העובדה שלכל $F \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה, יש איחוד $F = \bigcup K_n$ כאשר

$$K_n = F \cap [-n, n]^d$$

ואלה סגורות וחסומות לכל n. לכן

$$\lim_{n \to \infty} \mu(K_n) = \mu\left(\bigcup_n K_n\right) = \mu(F)$$

2 תכונות מידת לבג

■

2.1 המידה החיצונית

תהי $m^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ המידה החיצונית (המתקבלת מהפונקציה $f(x) = x$) הנתונה על ידי

$$\begin{aligned} m^*(E) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\right\} = \\ &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)\right\} = \\ &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]\right\} \end{aligned}$$

ראינו כי m^* מידה חיצונית.
נסמן בתור Σ את אוסף הקבוצות המדידות קרתאודורי - זוהי סיגמא אלגברה.

תזכורת $A \in \Sigma$ אם ורק אם לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

ודי לבדוק את האי שוויון $\geq$ עבור $m^*(E) < \infty$.

ראינו גם שכל קבוצת בורל היא מדידה כי m^* מידה חיצונית מטרית. כמו כן, ראינו כי $(\mathbb{R}, \Sigma, m^* |_{\Sigma})$ מידה שלמה. לבסוף, בדקנו גם כי

$$m^*([a,b)) = m^*((a,b)) = m^*([a,b]) = m^*((a,b]) = b - a$$

וכן $m^*(\{x\}) = 0$.

הצמצום $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m^* |_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}\right)$ היא מידת בורל־לבג. אכן, ראינו שזו מידת בורל אינווריאנטית להזזות, ומתקיים $m^*([0,1]) = 1$.

ההשלמה של המידה הזו היא מידת לבג. נסמן את אוסף הקבוצות המדידות לבג $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

מאחר והמידה $(\mathbb{R}, \Sigma, m^* |_{\Sigma})$ שלמה, נובע כי $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma$, וכן לכל $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, מידת לב שלה היא בדיוק $m^*(E)$.

לכן מידת לבג היא למעשה $\left(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m^* |_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}\right)$. נסמן $m = m^* |_{\mathcal{L}(\mathbb{R})}$ את מידת לבג. אזי

$$m(E) = m^*(E)$$

לכל E מדידה לבג. ראינו גם כי $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ היא אינווריאנטית להזזות ורגולרית (כי ראינו שתכונות אלה נשמרות תחת השלמת מידות, ולמידת בורל־לבג יש תכונות אלה).

הערה 2.1 תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. אזי

$$m^*(E) = \inf\{m(O) \mid E \subseteq O,\, O \text{ is open}\}$$

הוכחה: האי שוויון $\leq$מיידי. כמו כן, מתוך

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i$$

נובע כעת כי

$$\begin{aligned} m^*(E) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\} \geq \\ &\geq \inf\left\{m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i, b_i\right) \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\} = \\ &= \inf\{m(O) \mid E \subseteq O,\, O \text{ is open}\} \end{aligned}$$

■

מסקנה 2.2 לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(E) = \min\{m(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ is } G_\delta\}$$

הוכחה: אם $m^*(E) = \infty$, זה מיידי. אחרת, לכל n יש $E \subseteq O_n \subseteq \mathbb{R}$, עם O_n פתוחה, וכך שמתקיים

$$m(O_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$$

נסמן $A = \bigcap_n O_n$. אזי A מסוג G_δ, $E \subseteq A$ וכן $m^*(A) \leq m(E)$. כמו כן $E \subseteq A$, ולכן $m^*(E) \leq m^*(A)$, כלומר $m^*(E) = m^*(A)$.
כמובן, לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ מסוג G_δ עם $E \subseteq A$ מתקיים $m^*(E) \leq m(A)$. לכן נובע כי

$$m^*(E) = \min\{m(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ is } G_\delta\}$$

והמינימום מושג באותה A שראינו. ■

2.1.1 קבוצות זניחות

טענה 2.3 תהי $N \subseteq \mathbb{R}$. אזי $m^*(N) = 0$ אם ורק אם N מדידה לבג וכן $m(N) = 0$.

הוכחה: $\Rightarrow$: ברור, כי $m^*(N) = m(N) = 0$.
$\Leftarrow$: קיימת $N \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ כך שהקבוצה A מהסוג G_δ, ובפרט A בורל. לכן A מדידה לבג, וכן $m(A) = m^*(N) = 0$. מאחר ומתקיים $N \subseteq A$ ומידת לבג שלמה, נובע כי N מדידה לבג, וכן $m(N) \leq m(A) = 0$, כלומר $m(N) \leq 0$. ■

2.2 השוואת מדידות לבג וקרתאודורי

טענה 2.4 תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. אזי A מדידה לבג אם ורק אם A מדידה קרתאודורי, כלומר אם ורק אם לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

הוכחה: די להוכיח שאם A מדידה קרתאודורי, אזי A מדידה לבג (כיוון שני ראינו).
מאחר ומתקיים

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap [-n, n])$$

אפשר להניח כי A חסומה. בפרט, $m^*(A) < \infty$. קיימת קבוצה $B \subseteq \mathbb{R}$ מסוג G_δ עם $A \subseteq B$ וכן $m(B) = m^*(A)$.

מאחר והקבוצות A, B מדידות קרתאודורי, מתקיים

$$m(B) = m^*(A) + m^*(B \backslash A)$$

מאחר ומתקיים $m(B) = m^*(A) < \infty$, נובע כי $m^*(B \backslash A) = 0$. לכן $B \backslash A$ מדידה לבג, ומאחר וגם B מדידה לבג, נובע כי $A = B \backslash (B \backslash A)$ היא גם מדידה לבג. ■

2.3 סיכום איפיון קבוצות מדידות לבג

2.3.1 מידה פנימית

הגדרה 2.5 תהי $S \subseteq \mathbb{R}$ חסומה. יהיו $-\infty < a < b < \infty$ עבורם $S \subseteq [a, b]$, ונסמן

$$m_*(S) = b - a - m^*([a, b] \backslash S)$$

נבדוק שההגדרה הזו אינה תלוייה בבחירת $[a, b]$ שמכיל את S. די להוכיח שאם $S \subseteq [a, b] \subseteq [c, d]$ אזי

$$(d - c) - m^*([c, d] \backslash S) = (b - a) - m^*([a, b] \backslash S)$$

אבל $\Gamma = [c, a) \cup (b, d]$ מדידה (בורל ולכן לבג), ולכן

$$\begin{aligned} m^*([c, d] \backslash S) &= m^*(([c, d] \backslash S) \cap \Gamma) + m^*(([c, d] \backslash S) \cap \Gamma^c) = \\ &= m^*(\Gamma) + m^*([a, b] \backslash S) = (a - c) + (d - b) + m^*([a, b] \backslash S) = \\ &= (d - c) - (b - a) + m^*([a, b] \backslash S) \end{aligned}$$

טענה 2.6 תהי $S \subseteq \mathbb{R}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. S מדידה לבג.
2. לכל $\varepsilon > 0$ יש $O \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עם $S \subseteq O$ וכן $m^*(O \backslash S) < \varepsilon$.
3. לכל $\varepsilon > 0$ יש $F \subseteq \mathbb{R}$ סגורה עם $F \subseteq S$ וכן $m^*(S \backslash F) < \varepsilon$.
4. יש קבוצה $B \subseteq \mathbb{R}$ מסוג G_δ עם $S \subseteq B$ וכן $m^*(B \backslash S) = 0$.
5. יש קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ מסוג F_σ עם $A \subseteq S$ וכן $m^*(S \backslash A) = 0$ (וניתן לקחת גם איחוד של קבוצות סגורות וחסומות).
6. לכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$.

   אם $m^*(S) < \infty$, תנאים אלה שקולים גם לתנאי הבא:

7. לכל $\varepsilon > 0$ קיימים קטעים חסומים $I_1, \ldots, I_n$ כך שמתקיים

$$m^*\left(S\Delta\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right)\right) < \varepsilon$$

אם S גם חסומה, אז תנאים אלה שקולים גם לתנאי הבא:

8. $m_*(S) = m^*(S)$.

הוכחה: $1 \Rightarrow 2, 3$: כי מידת לבג היא רגולרית.
$5 \Leftarrow 4, 3 \Leftarrow 2$: ראינו.
$1 \Leftarrow 4, 5$: כי כל קבוצת בורל היא מדידה לבג, וראינו כי $m^*(N) = 0$ אם ורק אם N מדידה לבג וכן $m(N) = 0$.
$6 \iff 1$: ראינו.
עד כה, $1, 2, 3, 4, 5, 6$ שקולים. כעת נוכיח כי תנאים אלה שקולים לתנאי 7.
$1 - 6 \Rightarrow 7$: נניח כי S מדידה לבג עם מידה סופית. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים N עבורו

$$m\left(S\backslash\left(-N, N\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

נסמן כעת

$$S_N = S \cap \left(-N, N\right)$$

קיימת $O \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עם $S_n \subseteq O$ כך שמתקיים

$$m\left(O\backslash S_n\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

בפרט $m(O) < \infty$. כעת, יש איחוד זר

$$O = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

כאשר כל I_j קטע פתוח (אולי ריק). לכן

$$\sum_{j=1}^{\infty} m\left(I_j\right) = m\left(O\right) < \infty$$

ולכן קיים j_0 כך שמתקיים

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} m\left(I_j\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

נסמן

$$I=\bigcup_{j=1}^{j_0-1} I_j$$

וניקח $I=I_1\cup\cdots\cup I_m$. מתקיים

$$S\Delta I\subseteq\left(S\backslash\left(-N,N\right)\right)\cup\left(O\backslash S_N\right)\cup\left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} I_j\right)$$

נבדוק זאת בעוד רגע, ואז ינבע כי $m\left(S\Delta I\right)<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.
נבדוק את ההכלה:

$$\begin{aligned}
&\left(I\backslash S\right)\subseteq\left(I\backslash S_N\right)\subseteq\left(O\backslash S_N\right)\\
&\left(S\backslash I\right)\subseteq\left(S\backslash\left(-N,N\right)\right)\cup\left(S_N\backslash I\right)\subseteq\left(S\backslash\left(-N,N\right)\right)\cup\left(O\backslash I\right)=\\
&\quad=\left(S\backslash\left(-N,N\right)\cup\left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} I_j\right)\right)
\end{aligned}$$

$6\Rightarrow 7$: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ עם $m^*\left(E\right)<\infty$. מספיק להראות כי

$$m^*\left(E\right)\geq m^*\left(E\cap S\right)+m^*\left(E\cap S^c\right)$$

יהי $\varepsilon>0$. נקח $I_1,\ldots,I_m$ כמו שמובטח לנו מהתנאי בסעיף 7, ונסמן

$$I=\bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

מתקיים

$$\begin{aligned}
&\left(E\cap S\right)\subseteq\left(E\cap I\right)\cup\left(S\backslash I\right)\subseteq\left(E\cap I\right)\cup\left(S\Delta I\right)\\
&\left(E\cap S^c\right)\subseteq\left(E\cap I^c\right)\cup\left(S^c\backslash I^c\right)=\left(E\cap I^c\right)\cup\left(I\backslash S\right)\subseteq\left(E\cap I^c\right)\cup\left(S\Delta I\right)
\end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$\begin{aligned}
m^*\left(E\cap S\right)+m^*\left(E\cap S^c\right)&\leq m^*\left(E\cap I\right)+m^*\left(E\cap I^c\right)+2m^*\left(S\Delta I\right)=\\
&\overset{*}{=}m^*\left(E\right)+2m^*\left(S\Delta I\right)<m^*\left(E\right)+2\varepsilon
\end{aligned}$$

המעבר המסומן $*$ נובע משום שהקבוצה I היא מדידה לבג, ולכן קרתאודורי (תנאי 6).
משום שלקחנו $\varepsilon>0$ שרירותי, נובע האי שוויון שרצינו להראות.

כעת נניח כי S חסומה, ונראה 8 $\Longleftarrow$ 1. אפשר להניח $S\subseteq(a,b)$ (על ידי הגדלת קטע סגור אם צריך), ואז

$$m_*(S)=(b-a)-m^*([a,b]\setminus S)$$

ראשית, אם S מדידה לבג, אזי

$$\begin{gathered}b-a=m([a,b])=m(S)+m([a,b]\setminus S)\\ m^*(S)=m(S)=(b-a)-m([a,b]\setminus S)=m_*(S)\end{gathered}$$

בכיוון ההפוך, נניח $m_*(S)=m^*(S)$. קיימות A,B מסוג G_δ עבורן

$$S\subseteq A,[a,b]\setminus S\subseteq B$$

וכן

$$m^*(S)=m(A),m^*([a,b]\setminus S)=m(B)$$

מאחר והנחנו $S\subseteq(a,b)$ ניתן להחליף את A בקבוצה $A\cap(a,b)$ ולהניח $A\subseteq(a,b)$. מתקיים

$$[a,b]=S\cup([a,b]\setminus S)\subseteq A\cup B$$

כעת נקבל כי

$$\begin{gathered}m(A\setminus(A\cap B))+m(A\cap B)+m(B\setminus(A\cap B))+m(A\cap B)=m(A)+m(B)=\\ =m^*(S)+m^*([a,b]\setminus S)=b-a=m([a,b])\leq m(A\cup B)=m(A\setminus(A\cap B))+\\ +m(B\setminus(A\cap B))+m(A\cap B)\end{gathered}$$

כל המספרים הללו סופיים, ולכן נובע כי $m(A\cap B)=0$, אבל

$$(A\setminus S)\subseteq(A\cap[a,b]\setminus S)\subseteq(A\cap B)$$

ולכן

$$m^*(A\setminus S)\leq m(A\cap B)=0$$

מכאן $A\setminus S$ מדידה לבג וזניחה, ולבסוף $S=A\setminus(A\setminus S)$ מדידה לבג. ■

2.4 קבוצות לא מדידות לבג

טענה 2.7 תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה בעלת מידה חיצונית חיובית $m^*(A) > 0$. אזי A מכילה קבוצה שאינה מדידה לבג.

הוכחה: אפשר להניח כי A מדידה לבג (אחרת ניקח את A בעצמה). מרגולריות קיימת $K \subseteq A$ סגורה וחסומה עם $m(K) > 0$, כי ראינו שמידת A היא הסופרימום של המידות של הקבוצות הללו. לכן נוכל להניח כי K חסומה, נאמר $A \subseteq (-N, N)$. כעת נגדיר על A יחס שקילות:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

נקח מכל מחלקת שקילות איבר אחד, ונסמן $V \subseteq A$ את קבוצת הנציגים. זוהי הבנייה של ויטלי.

לכל $r \neq r'$ רציונאליים, הקבוצות $V + r, V + r'$ זרות, כי אם $x + r = y + r'$ כאשר $x, y \in V$ אזי בפרט $x - y = r' - r \in \mathbb{Q}$, לכן $x \sim y$, ומבניית V מתקיים $x = y$, כלומר $r = r'$ בסתירה.

נראה כי הקבוצה V אינה מדידה לבג בדרך השלילה. נניח כי V מדידה לבג. ראשית, יש איחוד זר

$$\bigcup_{r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} (V + r) \subseteq \bigcup_{r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} (A + r) \subseteq (-N, N + 1)$$

לכן נקבל

$$\sum_{r \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} m(V + r) \leq m(-N, N + 1) < \infty$$

אבל $m(V + r) = m(V)$ לכל r, וכן $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ היא בת מניה, ולכן נובע כי בהכרח $m(V) = 0$. מצד שני, לכל $z \in A$ יש $x \in V$, $r \in \mathbb{Q}$ עבורו $z = x + r$. כלומר

$$A \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (V + r)$$

ולכן

$$m(A) \leq \sum_{r \in \mathbb{Q}} m(V + r) = 0$$

וזו סתירה שכן $m(A) > 0$ לפי ההנחה. ∎

2.5 קבוצת קנטור ופונקצית קנטור

מתחילים מהקטע $[0,1]$. בשלב $n = 1$, מסמנים קטע פתוח $J_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, ונותרים שני קטעים סגורים $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

בשלב $n=2$, מסמנים קטעים פתוחים $J_{2,1}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right), J_{2,2}=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, ונותרים ארבעה קטעים סגורים $\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right]$.

ממשיכים ככה. אחרי שלב n נותרים 2^n קטעים סגורים, ובשלב $n+1$ מורדים את קטעי האמצע שלהם, שמסומנים $J_{n+1,1},\ldots,J_{n+1,2^n}$.

הקבוצה הנותרת היא חיתוך כל הקטעים הקבוצות הסגורות המתקבלות אחרי כל שלב. זוהי קבוצה סגורה בתוך $[0,1]$ הנקראת קבוצת קנטור.

בכל שלב, המידה אחרי השלב היא $\frac{2}{3}$ כפול המידה לפני השלב. לכן המידה של קבוצת קנטור היא 0. נסמן קבוצת קנטור בתור $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}\subseteq[0,1]$ סגורה, $m(\mathcal{C})=0$.

המשלים של קבוצת קנטור הוא קבוצה פתוחה:

$$J=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}J_{n,k}\right)$$

וכמובן $m(J)=1$.

כעת נגדיר את פונקציית קנטור: בקטע $J_{n,k}$ נגדיר

$$\varphi=\frac{2k-1}{2^n}$$

לכן על $J_{1,1}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ נקבל $\varphi=\frac{1}{2}$, על $J_{2,1}$ נקבל $\varphi=\frac{1}{4}$, על $J_{2,2}$ $\varphi=\frac{3}{4}$ וכן הלאה.

בצורה זו נקבל פונקציה רציפה $\varphi:J\to[0,1]$ מונוטונית עולה, ומקבל את כל הערכים מהצורה $0<\frac{m}{2^n}<1$ (כי אפשר להניח m אי זוגי).

עבור $0\neq x\in\mathcal{C}$, נגדיר $\varphi(x)=\sup\{\varphi(t)\mid J\ni t<x\}$, ונגדיר $\varphi(0)=0$(נשים לב שההגדרה שהצגנו כאן טובה גם על J). אזי $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ מונוטונית עולה, ומקבל כל ערך מהצורה $0<\frac{m}{2^n}<1$, ולכן נובע כי אין לה קפיצות, ומכאן שהיא רציפה ־ כלומר בפרט על. φ נקראת פונקצית קנטור.

2.6 קבוצה מדידה לבג שאינה בורל

בסימונים לעיל, נסמן $f(x)=\varphi(x)+x$ עבור $0\leq x\leq 1$. נקבל $f:[0,1]\to[0,2]$ רציפה ומונוטונית עולה במובן החזק. נובע כי f חד־חד־ערכית, ולכן $f^{-1}:[0,2]\to[0,1]$ רציפה, כלומר f היא הומיאומורפיזם. בפרט, f,f^{-1} מעבירות קבוצות בורל לקבוצות בורל. על כל קטע $J_{n,k}$ φ קבועה ולכן $f\mid_{J_{n,k}}=x+\mathrm{const}$. מכאן נובע כי $f(J_{n,k})$ הוא קטע פתוח, וכן

$$m(f(J_{n,k}))=m(J_{n,k})$$

לכן

$$f(J)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}f(J_{n,k})\right)$$

קבוצה פתוחה, עם

$$m(f(J))=\sum_{m,k}m(J_{m,k})=m(J)=1$$

לכן $f\left(\mathcal{C}\right)=\left[0,2\right]\backslash f\left(J\right)$ קבוצת בורל, עם

$$m\left(f\left(\mathcal{C}\right)\right)=2-m\left(f\left(J\right)\right)\geq1$$

מכאן נובעת שקיימת $A\subseteq f\left(\mathcal{C}\right)$ שאינה מדידה לבג, ובפרט A אינה בורל. מכאן נובע כי $f^{-1}\left(A\right)$ אינה בורל. אבל,

$$f^{-1}\left(A\right)\subseteq f^{-1}\left(f\left(\mathcal{C}\right)\right)=\mathcal{C}$$

אבל $m\left(\mathcal{C}\right)=0$, כלומר $m\left(f^{-1}\left(A\right)\right)=0$ ובפרט מדידה לבג, אך אינה מדידה בורל.