פונקציות ממשיות

ארזים ©

27 בנובמבר 2016

1 אינטגרציה של פונקציות אי שליליות

1.1 אינטגרל ביחס למידה מושרית

יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה, ותהי $\varphi : X \to Y$ פונקציה. נסמן

$$\Sigma_Y = \left\{ A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \Sigma \right\}$$

ונגדיר

$$\varphi_*\mu : \Sigma_Y \to [0,\infty]$$

על ידי

$$(\varphi_*\mu)(A) = \mu\left(\varphi^{-1}(A)\right)$$

ראינו כי $(Y,\Sigma_Y,\varphi_*\mu)$ מרחב מידה. אם $A \in \Sigma_Y$, אזי χ_A מדידה (על Y), וכן

$$\chi_A \circ \varphi = \chi_{\varphi^{-1}(A)}$$

וזוהי פונקציה מדידה (על X) - כי $\varphi^{-1}(A) \in \Sigma$. כמו כן:

$$\int\limits_Y \chi_A \,\mathrm{d}\varphi_*\mu = (\varphi_*\mu)(A) = \mu\left(\varphi^{-1}(A)\right) = \int\limits_X \chi_{\varphi^{-1}(A)} \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \chi_A \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

מסקנה 1.1 לכל $h : Y \to [0,\infty]$ מדידה, הפונקציה $h \circ \varphi : X \to [0,\infty]$ מדידה, ומתקיים

$$\int\limits_Y h \,\mathrm{d}\varphi_*\mu = \int\limits_X h \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: אם h פשוטה המסקנה נובעת מהחישוב שראינו לפני רגע. במקרה הכללי ניקח $t_n \nearrow h$ פשוטות על Y. אזי מתקיים $t_n \circ \varphi \nearrow h \circ \varphi$ פשוטות על X. בפרט נובע כי $h \circ \varphi$ מדידה וכמו כן:

$$\int\limits_Y h \,\mathrm{d}\varphi_*\mu \leftarrow \int\limits_Y t_n \,\mathrm{d}\varphi_*\mu = \int\limits_X t_n \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu \to \int\limits_X h \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

■

מינוח מידה 0 על (X, Σ) היא המידה עבורה $0\,(A) = 0$ לכל $A \in \Sigma$.

2 אינטגרציה של פונקציות ממשיות ומרוכבות

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה.

2.1 סימונים והגדרות

תהי $f : X \to [-\infty, \infty]$ פונקציה מדידה. נסמן

$$\begin{aligned} f^+ &= \max(f, 0) \\ f^- &= -\min(f, 0) = \max(-f, 0) = (-f)^+ \end{aligned}$$

אזי $f^\pm : X \to [0, \infty]$ מדידות, וכן

$$\begin{aligned} 0 &\leq f^\pm \leq |f| \\ |f| &= f^+ + f^- \\ f &= f^+ - f^- \end{aligned}$$

תכונה אם $f = g - h$ בכל נקודה בה ההפרש מוגדר, וכן $0 \leq g, h \leq \infty$, אזי $g \geq f^+, h \geq f^-$.

הוכחה: די לבדוק $g \geq f^+$, כי מתקיים $-f = h - g$ עם אותם תנאים, ונובע $h \geq (-f)^+ = f^-$

אם $g = \infty$, האי שוויון מיידי.

נניח כי $g < \infty$. אם $h = \infty$ האי שוויון מיידי ($f = -\infty$), ואם h סופי, האי שוויון מיידי. ■

2.2 פונקציות ממשיות

הגדרה 2.1 תהי $f : X \to \mathbb{R}$ אומרים כי f אינטגרבילית (על X) אם f מדידה וכן

$$\int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

במקרה זה מגדירים

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(X) = \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f^+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f^-\,\mathrm{d}\mu \in (-\infty, \infty)$$

תכונות

1. אם $f \geq 0$ אז הגדרת האינטגרל הזו תואמת את ההגדרה הקודמת.
2. אם f אינטגרבילית וכן $\alpha \in \mathbb{R}$, אזי

$$\int \alpha f = \alpha \int f$$

אכן, זה נכון עבור $\alpha = 0, \alpha = -1$ וכן $\alpha > 0$.

3. אם f, g אינטגרביליות, אזי $f + g$ אינטגרבילית וכן

$$\int\limits_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu$$

הוכחה:

$$(f+g)^+ - (f-g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ולכן

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

מכאן מתקיים

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+$$

כל המספרים סופיים שכן

$$\int |f+g| \leq \int |f| + |g| = \int |f| + \int |g| < \infty$$

ובסך הכל

$$\int f + g = \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$$

■

מסקנה 2.2 האינטגרל הוא פונקציה לינארית מעל $\mathbb{R}$.

4. אם f,g אינטגרביליות על X וכן $f \le g$ אזי $\int f \le \int g$.

הוכחה:

$$\int g - \int f = \int g - f \ge 0$$

(כעת אם $f \ge 0$ אינטגרבילית ברור כי $\int f \ge 0$) ■

5. אם $f = g$ כמעט בכל מקום, f,g ואחת מהן אינטגרבילית, אזי $\int f = \int g$ (כי $f^{\pm} = g^{\pm}$ כמעט בכל מקום).

6. אם f,g אינטגרביליות עם $f \le g$, וכן $\int f = \int g$, אזי $f = g$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: $g - f \ge 0$ אבל $\int (g-f) = 0$ ולכן $g - f = 0$ כמעט בכל מקום. ■

7. קיימת ההכללה הבאה: אם $f : [-\infty, \infty]$ מדידה וכן $\int f^- < \infty$ או $\int f^+ < \infty$ מגדירים לעיתים

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \in [-\infty, \infty]$$

2.3 פונקציות מרוכבות

הגדרה 2.3 פונקציה $f : X \to \mathbb{C}$ נקראת אינטגרבילית (על X) אם f מדידה וכן

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

במצב זה נובע מהאי שוויונים

$$\int |\mathrm{Re} f| , \int |\mathrm{Im} f| \le \int |f| < \infty$$

כי $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f$ אינטגרביליות, ומגדירים

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X (\mathrm{Re} f) \, \mathrm{d}\mu + i \int_X (\mathrm{Im} f) \, \mathrm{d}\mu$$

או לחילופין:

$$\mathrm{Re}\left(\int f\right) = \int \mathrm{Re}\,(f) , \mathrm{Im}\left(\int f\right) = \int \mathrm{Im}\,(f)$$

תכונות

1. ההגדרה הזו תואמת לקודמת (כאשר הפונקציה ממשית הן מזדהות).
2. תהי f מדידה. אזי f אינטגרבילית אם ורק אם $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$ אינטגרביליות.

הוכחה: אם f אינטגרבילית, ראינו בהגדרה את הטענה. אם $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$ אינטגרביליות, הטענה נובעת מכך שמתקיים $|f| \leq |\mathrm{Im}f| + |\mathrm{Re}f|$. ■

3. אם f, h מדידות, h אינטגרבילית וכן $|f| \leq |h|$ אזי f אינטגרבילית.
4. אם f, g אינגרביליות אזי $f + g$ אינטגרבילית ומתקיים $\int f + g = \int f + \int g$.
5. אם f אינטגרבילית וכן $\lambda \in \mathbb{C}$ אזי λf אינטגרבילית ומתקיים $\int \lambda f = \lambda \int f$.

הוכחה: אם λ ממשי זה נובע מאינטגרציה של פונקציות ממשיות. אם $\lambda = i$, אזי

$$\int if = \int \mathrm{Re}\,(if) + i \int \mathrm{Im}\,(if) = \int -\mathrm{Im}\,(f) + i \int \mathrm{Re}\,(f) = i \left(\int \mathrm{Re}\,(f) + i \int \mathrm{Im}\,(f) \right) = i \int f$$

כעת מחיבוריות הטענה נובעת. ■

6. אם f, g מדידות, אחת מהן אינטגרבילית, וכן $f = g$ כמעט בכל מקום, אזי שתיהן אינטגרביליות ומתקיים $\int f = \int g$.

טענה 2.4 אם f אינטגרבילית אזי $|f|$ אינטגרבילית (מיידית) וכן

$$\left| \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int\limits_X |f| \, \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: קיים $\theta \in \mathbb{R}$ עבורו

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = e^{i\theta} \left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right|$$

ולכן

$$\int e^{-i\theta} f \, \mathrm{d}\mu = e^{-i\theta} \int f \, \mathrm{d}\mu = \left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| \geq 0$$

מכאן

$$\begin{aligned} \left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| &= \int e^{-i\theta} f \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{Re} \left(\int e^{-i\theta} f \, \mathrm{d}\mu \right) = \int \mathrm{Re} \left(e^{-i\theta} f \right) \, \mathrm{d}\mu \leq \\ &\leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

■

הערה 2.5 אם $E \subseteq X$ מדידה מגדירים

$$\int_E f = \int_X \chi_E f$$

2.4 משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג

משפט 2.6 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. תהי $f_n : X \to \mathbb{C}$ סדרת פונקציות מדידות כך שקיים

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

לכל $x \in X$. אם קיימת פונקציה מדידה $g : X \to [0, \infty]$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned} \int_X g \, \mathrm{d}\mu &< \infty \\ |f_n| &\leq g \end{aligned}$$

אזי f אינטגרבילית, וכן מתקיים

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu &= \int_X f \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

הוכחה: ראשית נסמן

$$N = g^{-1}(\infty)$$

אזי N מדידה וכן $\mu(N) = 0$. ניתן לאפס את f_n ואת g על N, ולכן אפשר להניח כי g סופית בכל נקודה.
כעת, f מדידה, ומתקיים $|f| \leq |g|$, ולכן f אינטגרבילית. לכן גם $|f_n - f|$ אינטגרביליות.
מתקיים כמובן

$$2g - |f_n - f| \geq 0$$

ולכן מהלמה של פטו מתקיים

$$\begin{aligned} \int 2g &= \int \lim_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f_n - f|) = \liminf_{n\to\infty} \left(\int 2g + (-1) \int |f_n - f| \right) = \\ &= \int 2g + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int |f_n - f| \right) = \int 2g - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \end{aligned}$$

לכן $\limsup \int |f_n - f| \leq 0$ ומכאן $\lim \int |f_n - f| = 0$.
כך שנותר הוא

$$0 \leq \left| \int f - \int f_n \right| = \left| \int (f - f_n) \right| \leq \int |f - f_n| \to 0$$

■

3 אינטגרל ביחס להשלמת מידה ופונקציות מוגדרות כמעט בכל מקום

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה ותהי $(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ ההשלמה.

3.1 התחלה עם μ

1. אם $f : X \to Y$, כאשר Y מרחב מטרי, היא מדידה μ, אזי היא מדידה $\overline{\mu}$.
2. תהי $f : X \to [0, \infty]$ מדידה μ, אז

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\overline{\mu}$$

אכן, יש $f \nearrow s_n$ μ פשוטות ולכן

$$\int f \,\mathrm{d}\overline{\mu} \leftarrow \int s_n \,\mathrm{d}\overline{\mu} = \int s_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$$

3. אם $g : X \to \mathbb{C}$ μ מדידה, אזי g היא μ אינטגרבילית אם ורק אם g היא $\overline{\mu}$ אינטגרבילית (שכן $\int |g| \,\mathrm{d}\mu = \int |g| \,\mathrm{d}\overline{\mu}$), ובמקרה זה $\int g \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\overline{\mu}$ (בעזרת פירוק לחלקים - ממשי ודמיוני, חיובי ושלילי).

3.2 התחלה עם $\overline{\mu}$

תהי $f : X \to \mathbb{C}$ פונקציה $\overline{\mu}$ מדידה. אזי קיימת פונקצייה $g : X \to \mathbb{C}$ μ מדידה כך שמתקיים $f = g$ כמעט בכל מקום. **הוכחה:** על ידי פירוק $f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f$, די לבדוק זאת עבור f ממשית. על ידי הפירוק $f = f^+ - f^-$, די לבדוק זאת עבור $f : X \to [0, \infty)$ מדידה $\overline{\mu}$.

יהיו $f \nearrow s_n$ $\overline{\mu}$ פשוטות קירוב מונוטוני. נסמן

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= s_2 - s_1 \\ t_3 &= s_3 - s_2 \end{aligned}$$

וכן הלאה. כמובן t_n פשוטה $\overline{\mu}$ לכל n, ומתקיים

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}t_n$$

לכל n קיימת g_n μ פשוטה כך שמתקיים $t_n=g_n$ כמעט בכל מקום, אם $g_n\left(x\right)=0$ $t_n\left(x\right)=0$. כעת נגדיר

$$g=\sum_{n=1}^{\infty}g_n$$

■

3.3 פונקציות מוגדרות כמעט בכל מקום

הגדרה 3.1 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. פונקציה מוגדרת כמעט בכל מקום מתוך X לתוך $\mathbb{C}$ היא זוג (f,N), כאשר $N\subseteq X$ זניחה, וכן $f:(X\backslash N)\to\mathbb{C}$.

במצב זה מגדירים את f להיות 0 על N, ומקבליפ פונקציה $f:X\to\mathbb{C}$, ובהתאם להגדרה זו מתייחסים לתכונת היות f מדידה ולאינטגרביליות של f. נאח את התכונות הללו ביחס למידה השלמה $\overline{\mu}$.

הערה 3.2 תכונות אלה אינן תלויות בקבוצה N.

3.4 טורים

טענה 3.3 תהי f_n סדרת פונקציות מרוכבות מדידות ואינטגרביליות המוגדרות כמעט בכל מקום על X וכך שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\left|f_n\right|\,\mathrm{d}\overline{\mu}<\infty$$

אזי הטור $f\left(x\right)=\sum f_n\left(x\right)$ מתכנס כמעט בכל מקום ומתקיים

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\overline{\mu}$$

הוכחה: קיימת קבוצה $X\supseteq N$ זניחה כך שכל f_n מוגדרת מחוץ אליה, ונגדיר את f_n כולן להיות 0 על N. נגדיר

$$g=\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n\right|:X\to[0,\infty]$$

שהיא כמובן $\overline{\mu}$ מדידה. כמו כן

$$\int g\,\mathrm{d}\mu=\int\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\;\mathrm{d}\overline{\mu}=\sum_{n=1}^{\infty}\int|f_n|\;\mathrm{d}\mu<\infty$$

כאשר המעבר השני הוא על ידי התכנסות מונוטונית על הסכומים החלקיים. נסמן $N'=g^{-1}(\infty)$, שהיא זניחה, והסכום $\sum f_n$ מתכנס בהחלט מחוץ אליה. נאפס כל f_n על N', ואחרי שינוי זה, $\sum f_n$ ייתכנס בהחלט בכל מקום. הסכומים החלקיים מקיימים

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f_i\right|\le g$$

בסך הכל, ממשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג, נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f_i=\lim_{n\to\infty}\int\sum_{i=1}^{n}f_i=\int\sum_{i=1}^{\infty}f_i=\int f$$

כלומר קיבלנו

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int f_i=\int f$$

■

3.5 אינטגרלי על תת קבוצות מדידות וערכי f

יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה.

טענה 3.4 אם $f:X\to\mathbb{C}$ אינטגרבילית על X וכן לכל $E\in\Sigma$ מתקיים

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

אזי $f=0$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: ניתן להניח כי f ממשית (לפי הפירוק $f=\mathrm{Re}f+i\mathrm{Im}f$). כעת נסמן

$$\begin{aligned}E^+&=\{x\mid f(x)\ge 0\}\\E^-&=\{x\mid f(x)<0\}\end{aligned}$$

ואז

$$0=\int_{E^+}f=\int_{E^+}f^+=\int_X f^+$$

לכן $f^+=0$ כמעט בכל מקום. באופן דומה נובע $f^-=0$ כמעט בכל מקום. לכן $f=f^+-f^-=0$ כמעט בכל מקום. ■

טענה 3.5 תהי $f : X \to \mathbb{C}$ מרוכבת. אזי מתקיים

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| = \int |f| \,\mathrm{d}\mu$$

אם ורק אם $\lambda \in \mathbb{C}$ עם $|\lambda| = 1$, כך שמתקיים $f = \lambda |f|$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: אם $f = \lambda |f|$ עם $|\lambda| = 1$, אזי

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int \lambda |f| \,\mathrm{d}\mu\right| = |\lambda| \int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu$$

בכיוון השני, נניח שהתנאי על האינטגרלים מתקיים. על ידי כפל f באיזשהו $e^{i\varphi}$ עם φ ממשי מתאים ניתן להניח כי

$$\int f \,\mathrm{d}\mu$$

בפרט הוא ממשי, ולכן

$$\int f = \mathrm{Re} \int f = \int \mathrm{Re} f$$

מכאן מתקיים

$$\int \mathrm{Re} = \int f = \left|\int f\right| = \int |f| = \int \sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2}$$

לכן מתקיים

$$\int \left(\sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2} - \mathrm{Re} f\right) = 0$$

אבל הביטוי שבסוגריים אי שלילי, ולכן

$$\sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2} = \mathrm{Re} f$$

כמעט בכל מקום. כלומר $\mathrm{Im} f = 0$ כמעט בכל מקום, וכן $\mathrm{Re} f \geq 0$ כמעט בכל מקום, ולכן $f = |f|$ כמעט בכל מקום. ■

משפט 3.6 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה עם מידה סיגמא סופית. תהי $f : X \to \mathbb{C}$ פונקציה אינטגרבילית, ותהי $S \subseteq \mathbb{C}$ סגורה. נניח שלכל $E \in \Sigma$ עם $0 < \mu(E) < \infty$ מתקיים

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \in S$$

אזי $f(x) \in S$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: ניעזר בכך שכל קבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{C}$ היא איחוד בן מניה של כדורים פתוחים (כי $\mathbb{C}$ ספרבילי), ולכן גם איחוד בן מניה של כדורים סגורים.

רוצים להראות

$$\mu\left(f^{-1}\left(S^{c}\right)\right)=0$$

כמובן, S^c היא איחוד בן מניה של כדורים סגורים. לכן די להוכיח כי אם $\overline{B}=\overline{B\left(z,\varepsilon\right)}\subseteq S^{c}$, אזי $\mu\left(f^{-1}\left(\overline{B}\right)\right)=0$.

נסמן $E=f^{-1}\left(\overline{B}\right)$. יש פירוק

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_{n}$$

עם $\mu\left(X_{n}\right)<\infty$. מספיק להראות כי

$$\mu\left(E\cap X_{n}\right)=0$$

לכל n. נניח בשלילה כי זה לא מתקיים, כלומר $\mu\left(E\cap X_{n}\right)>0$. אזי

$$0<\mu\left(X_{n}\cap E_{n}\right)\leq\mu\left(X_{n}\right)<\infty$$

אם $x\in E\cap X_{n}$, אזי $x\in E$ ולכן

$$f\left(x\right)\in\overline{B}=\overline{B\left(z,\varepsilon\right)}$$

כלומר, $x\in E\cap X_{n}\Leftarrow\left|f\left(x\right)-z\right|\leq\varepsilon$. לכן

$$\int\limits_{E\cap X_{n}}\left|f-z\right|\leq\varepsilon\mu\left(E\cap X_{n}\right)$$

כעת

$$\left|\left(\frac{1}{\mu\left(E\cap X_{n}\right)}\cdot\int\limits_{E\cap X_{n}}f\,\mathrm{d}\mu\right)-z\right|=\left|\frac{1}{\mu\left(E\cap X_{n}\right)}\int\limits_{E\cap X_{n}}\left(f-z\right)\,\mathrm{d}\mu\right|\leq\frac{1}{\mu\left(E\cap X_{n}\right)}\int\limits_{E\cap X_{n}}\left|f-z\right|\,\mathrm{d}\mu\leq\varepsilon$$

כלומר מקבלים

$$\frac{1}{\mu\left(E\cap X_{n}\right)}\int\limits_{E\cap X_{n}}f\,\mathrm{d}\mu\in\overline{B\left(z,\varepsilon\right)}\subseteq S^{c}$$

אבל זו סתירה לנתון. $\blacksquare$