<u>פונקציות ממשיות</u>

ⓒ ארזים

6 בנובמבר 2016

1 מרחבים מטריים

1.1 מכפלות

בשיעור שעבר התחלנו להגדיר מכפלות של מרחבים מטריים. יש מספר דרכים להגדיר על מכפלה כזו מרחק, אבל כולן נותנות את אותה התכנסות, ולכן את אותן קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.1 יהיו $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ מרחבים מטריים. נסמן

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n$$

נגדיר מטריקה על X על ידי

$$d_\infty\left(\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n\right) = \max_{1 \le i \le n} d_i\left(a_i, b_i\right)$$

מטריקות אחרות:

$$\begin{aligned}
d_1\left(\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n\right) &= \sum_{i=1}^n d_i\left(a_i, b_i\right) \\
d_2\left(\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(d_i\left(a_i, b_i\right)\right)^2}
\end{aligned}$$

בכל המטריקות הללו, אם $\xi^k = \left(a_i^k\right)_{i=1}^n \in X$ לכל $k \in \mathbb{N}$, וכן $\xi = (a_i)_{i=1}^n \in X$, אזי יש שקילות:

$$\xi^k \xrightarrow{k \to \infty} \xi \iff a_i^k \xrightarrow{k \to \infty} a_i \forall 1 \le i \le n$$

מסקנה 1.2 העתקת הזהות רציפה במטריקות הללו בכל רכיב, ולכן הומיאומורפיזם.

מסקנה 1.3 למטריקות הללו אותה טופולוגיה (אותן קבוצות פתוחות).

נרצה לתאר את הטופולוגיה של מרחב המכפלה. תהי $O \subseteq X$. O פתוחה אם ורק אם לכל $\xi = (a_i)_{i=1}^n \in O$ קיימות סביבות (פתוחות) $A_i \subseteq X_i$ של a_i לכל $1 \leq i \leq n$, כך שמתקיים

$$A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq O$$

1.2 מטריקה וטופולוגיה על $[-\infty, \infty]$

תהי $f : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ פוקנציה רציפה, חסומה ומונוטונית עולה במובן החזק. נסמן

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_{\mathbb{R}} f(x) \\ b &= \lim_{x \to \infty} f(x) = \sup_{\mathbb{R}} f(x) \end{aligned}$$

נגדיל את תחום הפונקציה כדי לקבל:

$$f : [-\infty, \infty] \to (-\infty, \infty)$$

על ידי ההגדרה $f(-\infty) = a, f(b) = \infty$. נקבל העתקה חד־חד־ערכית ועל, ומונוטונית במובן החזק:

$$f : [-\infty, \infty] \to [a, b]$$

נגדיר מטריקה על $[-\infty, \infty]$ על ידי קביעת f כאיזומטריה:

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

במצב זה, קבוצה $A \subseteq [-\infty, \infty]$ פתוחה אם:

1. במצב בו $-\infty < x < \infty$ מקיים $x \in A$, אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.
2. אם $\infty \in A$, אזי קיים $\lambda \in (-\infty, \infty)$ כך שמתקיים $(\lambda, \infty] \subseteq A$.
3. אם $-\infty \in A$, אזי קיים $\lambda \in (-\infty, \infty)$ כך שמתקיים $[-\infty, \lambda) \subseteq A$.

מסקנה 1.4 הטופולוגיה המתקבלת על $[-\infty, \infty]$, ולכן גם מושג הגבול של סדרה, אינם תלויים בבחירת f.

מסקנה 1.5 המושגים של גבול במרחב $[-\infty, \infty]$עם המטריקה d_f וגבול במרחב הזה כפי שהגדרנו בשיעור שעבר ־ זהים.

מסקנה 1.6 המטריקה d_f, כאשר מצומצמת למרחב $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ משרה מטריקה היוצרת את הטופולוגיה הרגילה של מרחב זה (אותן קבוצות פתוחות) ולכן אותן סדרות מתכנסות ואותם גבולות.

2 σ־אלגברה

סימון אם X קבוצה, $A \subseteq X$,

$$A^c = X \backslash A$$

הגדרה 2.1 תהי X קבוצה, ותהי Σ קבוצת תתי קבוצות של X. אם מתקיים:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
3. $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$

אז אומרים כי Σ היא אלגברה של קבוצות על X.

הערה 2.2 אם Σ היא אלגברה על X, מתקיים גם

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A^c \cup B^c)^c \in \Sigma \\ A \backslash B &= A \cap B^c \in \Sigma \\ X &= \emptyset^c \in \Sigma \end{aligned}$$

הגדרה 2.3 תהי Σ אוסף של תת קבוצות של X. אם מתקיימות תכונות $1, 2$ שלעיל, וכן התכונה

$$A_1, A_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$$

אז אומרים כי Σ היא σ־אלגברה של X, והזוג (X, Σ) נקרא מרחב מדיד. כל איבר של Σ נקרא קבוצה מדידה.

הערה 2.4 נשים לב כי בתכונה השלישית של σ־אלגברה, ניתן לקחת את כל הקבוצות חוץ משתיים להיות ריקות, ואז מקבלים את התכונה השלישית של אלגברה ־ ולכן כל σ־אלגברה היא אלגברה.

הערה 2.5 אם Σ היא σ־אלגברה על X אזי

$$A_1, A_2, \dots \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \Sigma$$

הערה 2.6 אם Σ אלגברה על X, אזי Σ היא σ־אלגברה על X אם ורק אם לכל $B_1, B_2, \dots \in \Sigma$ כך שהן זרות בזוגות מתקיים

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$$

כעת, התכונה השלישית של σ־אלגברה נובעת מתנאי זה על ידי הגדרת

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \backslash A_1 \\ &\vdots \\ B_n &= A_n \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

2.1 σ־אלגברה הנוצרת על ידי אוסף תתי קבוצות של X

תהי X קבוצה. נסמן בתור 2^X את אוסף תתי הקבוצות של X. בבירור, 2^X היא σ־אלגברה על X. כעת, יהי $S \subseteq 2^X$ אוסף כלשהו של תת קבוצות של X. נסתכל על משפחה שמכילה כל σ־אלגברה של X המכילה את S. משפחה זו לא ריקה, כי $S \subseteq 2^X$. חיתוך המשפחה הזו הוא σ־אלגברה, והוא מוכל בכל σ־אלגברה על X שמכילה את S. על σ־אלגברה זו נאמר שהיא נוצרת על ידי S, ונסמנה S^*.

תאור בהינתן $A \subseteq X$, מתקיים $A \in S^*$ אם ורק אם לכל σ־אלגברה Σ המכילה את S מתקיים $A \in \Sigma$.

2.2 משפט המחלקה המונוטונית

הגדרה 2.7 אוסף $\mathcal{M} \subseteq 2^X$ נקרא מחלקה <u>מונוטונית</u> אם מתקיים:

1. אם $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ כך שלכל i מתקיים $A_i \in \mathcal{M}$, אזי

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$$

2. אם $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ כך שלכל i מתקיים $A_i \in \mathcal{M}$, אזי

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$$

הערה 2.8 כל σ־אלגברה היא מחלקה מונוטונית.

הערה 2.9 אם $S \subseteq 2^X$ אלגברה, וכן מתקיימת תכונה 1 שלעיל, אזי S σ־אלגברה. אכן, אם $c_1, c_2, \dots \in S$, נוכיח שהאיחוד שלהן גם כן איבר של S. S אלגברה, ולכן לכל n מתקיים

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} c_i \in S$$

ואז $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ שכולן איברים של S, ולכן

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} c_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$$

הערה 2.10 אם $\mathcal{M}$ מחלקה מונוטונית, ואם נסמן

$$\mathcal{M}' = \{E \subseteq X \mid E^c \in \mathcal{M}\}$$

אזי $\mathcal{M}'$ היא מחלקה מונוטונית. תכונה 1 של $\mathcal{M}'$ נובעת מתכונה 2 של $\mathcal{M}$, ולהיפך.

הערה 2.11 אם $S \subseteq 2^X$, אזי חיתוך כל המחלקות המונוטוניות המכילות את S הוא מחלקה מונוטונית, הנקראת המחלקה המונוטונית הנוצרת על ידי S, ונסמנו S_μ. עבור $A \subseteq X$ מתקיים $A \in S_\mu$ אם ורק אם A איבר של כל מחלקה מונוטונית המכילה את S.

משפט 2.12 (משפט המחלקה המונוטונית) תהי X קבוצה, ותהי $S \subseteq 2^X$ אלגברה של תת קבוצות של X. אזי $S^* = S_\mu$, כלומר המחלקה המונוטונית הנוצרת על ידי S היא σ־אלגברה שנוצרת על ידי S.

הוכחה: ראשית, S^* היא מחלקה מונוטונית שמכילה את S, ולכן $S_\mu \subseteq S^*$. נוכיח כי S_μ היא σ־אלגברה, מכאן נסיק כי $S^* \subseteq S_\mu$ ונקבל את השוויון שרצינו.

S_μ מחלקה מונוטונית, ולכן מספיק להוכיח שהיא אלגברה. ראשית, $\emptyset \in S \subseteq S_\mu$, שכן S אלגברה. כעת, נסמן

$$S_\mu^{'} = \{A \mid A^c \in S_\mu\}$$

אזי S_μ' היא מחלקה מונוטונית וכן $S \subseteq S_\mu'$ (שכן S אלגברה, $S \subseteq S_\mu$). לכן $S_\mu \subseteq S_\mu'$. מכאן $E \in S_\mu \Rightarrow E \in S_\mu' \Rightarrow E^c \in S_\mu$.

כעת, לכל $B \subseteq X$ נסמן $\mathcal{C}(B) = \{A \subseteq X \mid A \cup B \in S_\mu\}$. זוהי מחלקה מונוטונית.

נתחיל עם $B \in S$. במצב זה $S \subseteq \mathcal{C}(B)$ (כי S אלגברה, $S \subseteq S_\mu$), ולכן $S_\mu \subseteq \mathcal{C}(B)$.

כלומר $B \in S$, $A \in S_\mu \Leftarrow A \cup B \in S_\mu$. כנ"ל $A \in S$, $B \in S_\mu \Leftarrow A \cup B \in S_\mu$.

כלומר, עבור $B \in S_\mu$ מתקיים $S \subseteq \mathcal{C}(B)$. לכן $B \in S_\mu \Leftarrow S_\mu \subseteq \mathcal{C}(B)$. לבסוף נובע מהגדרת $\mathcal{C}(B)$ כי $A, B \in S_\mu \Leftarrow A \cup B \in S_\mu$.

בסך הכל, סיימנו. ■

2.3 תתי מרחב

סימון אם X קבוצה, $S \subseteq 2^X$, $Y \subseteq X$, נסמן

$$S\mid_Y = \{A \cap Y \mid A \in S\}$$

נקרא לסימון זה הצמצום של S אל Y.

דוגמא אם X מרחב מטרי, $Y \subseteq X$ תת מרחב, T_x הטופולוגיה של X, T_y הטופולוגיה של Y, ואז ראינו בעבר כי

$$T_y = T_x\mid_y$$

תכונה אם Σ היא σ־אלגברה על X, אזי $\Sigma\mid_Y$ היא σ־אלגברה על Y. נבדוק את תנאי האיחוד: יהיו $B_1, B_2, \dots \in \Sigma\mid_Y$. לכל n קיימת $A_n \in \Sigma$ עבורה $B_n = A_n \cap Y$.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$$

ומכאן נובע כי

$$\Sigma\mid_Y \ni \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

טענה 2.13 תהי $S \subseteq 2^X$ ותהי $Y \subseteq X$. אזי

$$S^*\mid_Y = (S\mid_Y)^*$$

כלומר, $S\mid_Y$ יוצרת במרחב Y את אותה σ־אלגברה שמתקבלת מצמצום על Y של אותה σ־אלגברה שנוצרת על ידי S.

הוכחה: $S \subseteq S^*$ ולכן $S\mid_Y \subseteq S^*\mid_Y$. מצד שני, $S^*\mid_Y$ היא σ־אלגברה ולכן $(S\mid_Y)^* \subseteq S^*\mid_Y$.

בכיוון השני, נסמן

$$\Sigma = \left\{C \subseteq X \mid C \cap Y \in (S\mid_Y)^*\right\} = \left\{A \cup B \mid A \in (S\mid_Y)^*, B \subseteq Y^c\right\}$$

אז Σ היא σ־אלגברה (על X). כמו כן, $S \subseteq \Sigma$, כי אם $C \in S$ אזי

$$C \cap Y \in S\mid_Y \subseteq (S\mid_Y)^*$$

לכן $S^* \subseteq \Sigma$. כעת, נובע כי לכל $C \in S^*$ מתקיים $C \cap Y \in (S|_Y)^*$. לבסוף נובע כי

$$S^* |_Y \subseteq (S|_Y)^*$$

ובכך הוכחנו את השוויון. ■

הערה 2.14 יהי (X, Σ) מרחב מדיד.

1. אם $Y \in \Sigma$, אזי

$$\Sigma |_Y = \{A \in \Sigma \mid A \subseteq Y\} \subseteq \Sigma$$

2. אם $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ כאשר לכל n מתקיים $X_n \in \Sigma$, אזי עבור $A \subseteq X$ מתקיים

$$\forall n \;\; A \cap X_n \in \Sigma |_{X_n} \iff A \in \Sigma$$

מסקנה 2.15 בסיטואציה של ההערה השנייה,

$$\Sigma = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \Sigma |_{X_n} \right\}$$

3 קבוצות בורל

הגדרה 3.1 יהי X מרחב מטרי. אוסף קבוצות בורל, המסומן בתור $\mathcal{B}(X)$, הוא אותה σ-אלגברה שנוצרת על ידי הטופולוגיה של X, כלומר $\mathcal{B}(x) = T_x^*$

הערה 3.2
1. $\mathcal{B}(x)$ גם נוצרת על ידי אוסף הקבוצות הסגורות של X.
2. $\mathcal{B}(x)$ תלוי רק בטופולוגיה של X.

טענה 3.3 אם X מרחב מטרי, $Y \subseteq X$ אזי

$$\mathcal{B}(X) |_Y = \mathcal{B}(Y)$$

כאשר כאן על Y יש את המטריקה המושרית.

הוכחה: נסמן בתור T_X, T_Y את הטופולוגיות. ראינו כי $T_X |_Y = T_y$. לכן

$$\mathcal{B}(Y) = T_Y^* = (T_X |_Y)^* = T_X^* |_Y = \mathcal{B}(X) |_Y$$

■