פונקציות ממשיות

© ארזים

22 בינואר 2017

1 נקודות לבג

1.1 פונקציה מקסימלית גבולית

הגדרה 1.1 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה מדידה לבג. נסמן

$$f^*(x)=\limsup_{t\to0^+}\frac{1}{2t}\int\limits_{x-t}^{x+t}|f(u)|\,\mathrm{d}u\coloneqq\lim_{\delta\to0^+}\left(\sup_{0<t<\delta}\frac{1}{2t}\int\limits_{x-t}^{x+t}|f(u)|\,\mathrm{d}u\right)$$

למה 1.2 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, אזי לכל $\alpha>0$ מתקיים

$$m^*(\{x\in\mathbb{R}\mid f^*(x)>\alpha\})\le\frac{1}{\alpha}\|f\|_1=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f|$$

הוכחה: די להוכיח שלכל n שלם מתקיים

$$m^*(\{x\in(n,n+1)\mid f^*(x)>\alpha\})\le\frac{1}{\alpha}\int\limits_{n}^{n+1}|f(u)|\,\mathrm{d}u$$

אכן, אם הוכחנו זאת, נובע כי

$$m^*(f^*>\alpha)\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}m^*(\{x\in(n,n+1)\mid f^*(x)>\alpha\})+\sum_{n=-\infty}^{\infty}m^*(\{n\})\le$$
$$\le\frac{1}{\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}|f|=\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f|$$

נקבע כעת n. נסמן

$$E=\{x\in(n,n+1)\mid f^*(x)>\alpha\}$$

נסמן בתור Φ את אוסף הקטעים מהצורה $(n,n+1) \supseteq [x-t,x+t]$, עם $t>0$, ושעבורם

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(u)|\,\mathrm{d}u>\alpha$$

זהו כיסוי ויטלי של E. יהי $\varepsilon>0$ כלשהו. קיימים $I_1,\ldots,I_k\in\Phi$ זרים בזוגות, כך שמתקיים

$$m^*\left(E\backslash\left(\bigcup_{=1}^{k}I_j\right)\right)\leq\varepsilon$$

כעת, מאחר ומתקיים $I_j\in\Phi$ לכל j, מתקיים

$$l(I_j)\leq\frac{1}{\alpha}\int_{I_j}|f|$$

מאחר והם זרים בזוגות נקבל

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{k}I_j\right)=\sum_{i=1}^{k}l(I_i)\leq\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{k}\int_{I_i}|f|=\frac{1}{\alpha}\int_{\bigcup_j I_j}|f|\leq\frac{1}{\alpha}\int_{n}^{n+1}|f|$$

לבסוף נקבל כי

$$m^*(E)\leq m\left(\bigcup_{j=1}^{k}I_j\right)+m^*\left(E\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{k}I_j\right)\right)\leq\frac{1}{\alpha}\int_{n}^{n+1}|f|+\varepsilon$$

ε קטן כרצוננו, ולכן נקבל את אי השוויון שרצינו. ■

הערה 1.3 לפי אי שוויון צ'בישב, אם φ אינטגרבילית, אזי

$$m^*(\{|\varphi|>\alpha)\leq\frac{1}{\alpha}||\varphi||_1$$

1.2 נקודות לבג

הגדרה 1.4 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ויהי $x\in\mathbb{R}$. x היא נקודת לבג של f אם מתקיים

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(u)-f(x)|\,\mathrm{d}u=0$$

תכונה אם f רציפה בנקודה x, אזי x נקודת לבג של f.

אכן, לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ עבורו אם $x-\delta \le u \le x+\delta$ אזי $|f(x)-f(u)| < \varepsilon$ ולכן אם $0 < t < \delta$, מתקיים

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f-f(x)| \le \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}\varepsilon = \varepsilon$$

הערה 1.5 ההגדרה תלוייה בערך של f בנקודה x.

משפט 1.6 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. אזי כמעט כל נקודה $x\in\mathbb{R}$ היא נקודת לבג של f.

הוכחה: נגדיר פונקציה $f^{**}:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ על ידי

$$f^{**}(x) = \limsup_{t\to 0^+}\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(u)-f(x)|\,\mathrm{d}u$$

נרצה להראות כי $f^{**}=0$ כמעט בכל מקום.
נשים לב כי מתקיים

$$\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(u)-f(x)|\,\mathrm{d}u \le \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(u)|\,\mathrm{d}u + |f(x)|$$

ולכן נקבל כי

$$f^{**}(x) \le f^{*}(x) + |f(x)|$$

מכאן, לכל $\alpha > 0$ מתקיים

$$m^{*}(\{f^{**} > 2\alpha\}) \le m^{*}(\{f^{*} > \alpha\}) + m^{*}(\{|f| > \alpha\}) \le \frac{2}{\alpha}\,||f||_1$$

כמו כן נשים לב כי אם $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית נוספת, אזי

$$(f\pm g)^{**} \le f^{**} + g^{**}$$

נובע מזה שמתקיים

$$|(f\pm g)(u) - (f\pm g)(x)| \le |f(u)-f(x)| + |g(u)-g(x)|$$

כמו כן, אם $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה אזי $h^{**}=0$.
לכן, אם g רציפה נקבל

$$(f+g)^{**}\leq f^{**}+g^{**}=f^{**}=((f+g)-g)^{**}\leq(f+g)^{**}+g^{**}=(f+g)^{**}$$

מכאן נקבל כי

$$(f+g)^{**}=f^{**}$$

לבסוף, יהי $\varepsilon>0$. קיימת פונקציה רציפה ואינטגבילית כך שמתקיים $||f+g||_1<\varepsilon$.
כעת

$$m^*\left(f^{**}>2\alpha\right)=m^*\left((f+g)^{**}>\alpha\right)\leq\frac{2}{\alpha}\,||f+g||_1<\frac{2\varepsilon}{\alpha}$$

לקחנו $\varepsilon>0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*\left(f^{**}>2\alpha\right)=0$$

גם $\alpha>0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*\left(f^{**}>0\right)=0$$

ולכן $f^{**}=0$ כמעט בכל מקום. ■

1.3 גזירות האינטגרל

משפט 1.7 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ויהי $a\in\mathbb{R}$ כלשהו (או $a=\pm\infty$). אזי כמעט לכל x ממשי מתקיים

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)(x)=f(x)$$

כתיבה שקולה:

$$\left(\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)'=f$$

כמעט בכל מקום.

הוכחה: די להראות שהשוויון מתקיים לכל x שהוא נקודת לבג של f. לגבי נגזרת מימין:

$$\lim_{t\to0^+}\left|\frac{\int_a^{x+t} f-\int_a^x f}{t}-f(x)\right|=\lim_{t\to0^+}\left|\frac{1}{t}\left(\int_x^{x+t} f(u)\,\mathrm{d}u-\int_x^{x+t} f(x)\,\mathrm{d}u\right)\right|\le$$

$$\le\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\int_x^{x+t}|f(u)-f(x)|\,\mathrm{d}u\le2\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(u)-f(x)|\,\mathrm{d}u=0$$

משמאל:

$$\lim_{t\to0^+}\left|\frac{1}{-t}\left(\int_a^{x-t} f-\int_a^x f\right)-f(x)\right|=\lim_{t\to0^+}\left|\frac{1}{t}\int_{x-y}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u-f(x)\right|=\lim_{t\to0^+}\left|\frac{1}{t}\left(\int_{x-t}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u-\int_{x-t}^{x} f(x)\,\mathrm{d}u\right)\right|\le$$

$$\le\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\int_{x-t}^{x}|f(u)-f(x)|\,\mathrm{d}x\le2\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}|f(u)-f(x)|\,\mathrm{d}u=0$$

ולכן סיימנו. ■

2 פונקציות מונוטוניות, פונקציות רציפות בהחלט ופונקציות בעלות השתנות חסומה

2.1 פונקציות מונוטוניות

הערה 2.1 בפרק זה, פונקציה מונוטונית תהיה פונקציה מונוטונית עולה חלש.

הגדרה 2.2 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית. לכל $a<x<b$ נסמן

$$\left(f'_+\right)(x)=\limsup_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\in[0,\infty]$$
$$\left(f'_-\right)(x)=\liminf_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\in[0,\infty]$$

ברור כי f גזירה בנקודה x אם ורק אם $\left(f'_+\right)(x)=\left(f'_-\right)(x)<\infty$. כמו כן, $f'_-\le f'_+$.

טענה 2.3 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית. אזי לכל $\alpha>0$ מתקיים

$$m^*\left(\left\{x\in(a,b)\mid f'_+(x)\ge\alpha\right\}\right)\le\frac{f(b)-f(\alpha)}{\alpha}$$

הוכחה: נסמן

$$E=\left\{x\in(a,b)\mid f'_{+}(x)\geq\alpha\right\}$$

יהי $0<\beta<\alpha$ כלשהו. לכל $x\in E$ קיימים קטעים $x\in[c,d]\subseteq(a,b)$ עם $c<d$ קטנים כרצוננו וכך שמתקיים

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geq\beta$$

נתיחס לאוסף Φ של קטעים $[c,d]\in(a,b)$ עם $c<d$ וכן

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\geq\beta$$

אזי Φ כיסוי ויטלי של E.
יהי $\varepsilon>0$. לפי למת הכיסוי קיימים קטעים $I_1,\dots,I_n\in\Phi$ כך זרים בזוגות המקיימים

$$m^*\left(E\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{n}I_j\right)\right)<\varepsilon$$

נסמן קטעים אלה בתור $I_j=[c_j,d_j]$. ואז

$$\frac{f(d_j)-f(c_j)}{d_j-c_j}\geq\beta$$

כמו כן, מאחר והקטעים זרים בזוגות, וכן f מונוטונית, נובע כי

$$\sum_{j=1}^{n}\left(f(d_j)-f(c_j)\right)\leq f(b)-f(a)$$

לבסוף,

$$m^*(E)\leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n}I_j\right)+m^*\left(E\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{n}I_j\right)\right)\leq\sum_{j=1}^{n}(d_j-c_j)+\varepsilon\leq\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n}\left(f(d_j)-f(c_j)\right)+\varepsilon\leq$$
$$\leq\frac{f(b)-f(a)}{\beta}+\varepsilon$$

$\varepsilon>0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*(E)\leq\frac{f(b)-f(a)}{\beta}$$

וכעת, β קרוב כרצוננו אל α, ולכן

$$m^*(E) \leq \frac{f(b)-f(a)}{\alpha}$$

כמו שרצינו. ■

הערה 2.4 על ידי לקיחת $\alpha = 1, 2, \ldots$ נובע כי

$$m^*\left(f'_+ = \infty\right) = 0$$

משפט 2.5 (לבג) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונטונית. אזי f גזירה על $[a,b]$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: די להוכיח שלכל זוג $0 < \alpha < \beta < \infty$ של מספרים רציונאליים, הקבוצה

$$E = E_{\beta,\alpha} = \left\{x \in (a,b) \mid f'_-(x) < \beta < \alpha < f'_+(x)\right\}$$

היא ממידה 0.

יהי $\varepsilon > 0$. תהי $E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}$, G פתוחה עם $m(G) \leq m^*(G) + \varepsilon$. יהי Φ אוסף הקטעים $[c,d] \subseteq G$ עם $c < d$ ועם

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c} < \beta$$

מאחר ומתקיים $f'_- < \beta$ על E, נובע כי Φ כיסוי ויטלי של E. תהי $\{[c_k,d_k]\}_{k=1}^n$ תת קבוצה סופית של קטעים זרים זה לזה עם

$$m^*\left(E \backslash \left(\bigcup_{k=1}^n [c_k,d_k]\right)\right) < \varepsilon$$

נסתכל על צמצום f על כל $[c_k,d_k]$. מאחר ומתקיים $f'_+ > \alpha$ על E, נובע מהטענה הקודמת

$$m^*(E \cap [c_k,d_k]) \leq \frac{f(d_k)-f(c_k)}{\alpha}$$

וזאת לכל k. מצד שני, מהגדרת Φ מתקיים לכל k

$$\frac{f(d_k)-f(c_k)}{d_k-c_k} < \beta$$

לכן נקבל כי

$$m^*\left(E\cap[c_k,d_k]\right)\leq\frac{f\left(d_k\right)-f\left(c_k\right)}{\alpha}\leq\frac{\beta}{\alpha}\left(d_k-c_k\right)$$

וגם זה לכל k. לבסוף:

$$m^*\left(E\right)\leq m^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^n[c_k,d_k]\right)\right)+m^*\left(E\backslash\left(\bigcup_{k=1}^n[c_k,d_k]\right)\right)\leq\sum_{k=1}^n m^*\left(E\cap[c_k,d_k]\right)+\varepsilon\leq$$

$$\leq\frac{\beta}{\alpha}\sum_{k=}^n\left(d_k-c_k\right)+\varepsilon=\frac{\beta}{\alpha}m\left(\bigcup_{k=1}^n[c_k,d_k]\right)+\varepsilon\leq\frac{\beta}{\alpha}m\left(G\right)+\varepsilon\leq\frac{\beta}{\alpha}\left(m^*\left(E\right)+\varepsilon\right)+\varepsilon$$

$\varepsilon>0$ קטן כרצוננו, ולכן

$$m^*\left(E\right)\leq\frac{\beta}{\alpha}m^*\left(E\right)$$

$0<\beta<\alpha$, וכן $0\leq m^*\left(E\right)<\infty$, ולכן

$$m^*\left(E\right)=0$$

■

משפט 2.6 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונטונית (עולה) אזי $f'\geq 0$ (מוגדרת כמעט בכל מקום), אינטגרבילית על $[a,b]$, וכן

$$\int_a^b f'\left(x\right)\,\mathrm{d}x\leq f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

הוכחה: $f'\geq 0$ מיידי. נרחיב את f להיות $f\left(b\right)$ לערכי x שגדולים יותר מאשר b.
לכל n, נגדיר פונקציה $g_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ על ידי

$$g_n\left(x\right)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x\right)\right)\geq 0$$

אזי $g_n\to f'$ כמעט בכל מקום, ובפרט f' מדידה לבג.

לפי הלמה של פטו (אחרי איפוס f' וכן g_n בנקודות בהן f' אינה מוגדרת) נקבל

$$\int_a^b f' = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n = \liminf_{n\to\infty} n \left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^b f \right) =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} n \left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \right) = \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\ \mathrm{d}x \right) \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\ \mathrm{d}x \right) = \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - f(a) \right) = f(b) - f(a)$$

■

2.2 פונקציות רציפות בהחלט

הגדרה 2.7 פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט על $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ עבורו לכל סדרת קטעים $(x_i,x_i')\subseteq[a,b]$ שהם זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i) < \delta$$

מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

הערה 2.8 אם f רציפה בהחלט על $[a,b]$ אזי f רציפה על $[a,b]$.

הערה 2.9 אם f,g רציפות בהחלט על $[a,b]$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, אזי $c_1 f + c_2 g$ רציפה בהחלט על $[a,b]$.

דוגמה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. אזי הפונקציה

$$[a,b] \ni x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

רציפה בהחלט.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. ראינו שקיים $\delta>0$ כך שאם $E\subseteq[a,b]$ מדידה ומקיימת $m(E)<\delta$ אזי

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

נניח $a \leq x_1 < x'_1 \leq x_2 < x'_2 \leq \cdots \leq x_n < x'_n \leq b$ מקיימים

$$\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) < \delta$$

נסמן

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i, x'_i)$$

אזי $m(E) < \delta$, ולכן

$$\int_E |f| < \varepsilon$$

כעת,

$$\left| \int_a^{x'_i} f - \int_a^{x_i} f \right| = \left| \int_{x_i}^{x'_i} f \right| \leq \int_{x_i}^{x'_i} |f| = \int_{(x_i, x'_i)} |f|$$

לכן

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^{x'_i} f - \int_a^{x_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{(x_i, x'_i)} |f| = \int_E |f| + \varepsilon$$

■

בהמשך, נוכיח כי אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט אזי קיימות $g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפות בהחלט ומונוטוניות עבורן $f = g - h$.

מסקנה 2.10 אם f רציפה בהחלט על $[a,b]$ אזי f גזירה כמעט בכל מקום על $[a,b]$.

טענה 2.11 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט על $[a,b]$. אם $f' = 0$ כמעט בכל מקום אזי f קבועה על $[a,b]$.

הוכחה: די להוכיח כי $f(a) = f(c)$ לכל $a \leq c \leq b$. על ידי החלפת $[a,b]$ בקטע $[a,c]$, מספיק להוכיח כי $f(b) = f(a)$.

תהי $\{a,b\} \subseteq N \subseteq [a,b]$ קבוצה מדידה עם $m(N) = 0$ וכך שלכל $x \in [a,b] \setminus N$, f גזירה בנקודה x וכן $f'(x) = 0$. נסמן $E = [a,b] \setminus N$. אזי E מדידה וכן $m(E) = b - a$. לכל $x \in E$ מתקיים $f'(x) = 0$.

יהיו $\eta, \varepsilon > 0$ כלשהם. יהי $\delta > 0$ עבורו אם $(x_i, x_i') \subseteq [a,b]$ זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^{l} (x_i' - x_i) < \delta$$

אזי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{l} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

יהי Φ אוסף הקטעים $[x,y] \subseteq (a,b)$ עם $x < y$, כך שמתקיים

$$|f(y) - f(x)| < \eta |y - x|$$

אזי Φ כיסוי ויטלי של E. מלמת הכיסוי נובע שקיימים קטעים $[x_i, y_i]$ זרים בזוגות עם

$$m\left(E \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\right)\right) < \delta$$

מאחר ומתקיים

$$m([a,b] \backslash E) = m(N) = 0$$

נקבל

$$m\left([a,b] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\right)\right) < \delta$$

על ידי סידור אינדקסי הקטעים, אפשר להניח כי

$$a =: y_0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n < x_{n+1} := b$$

אזי

$$\sum_{i=0}^{n+1} (x_{i+1} - y_i) = m\left([a,b] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\right)\right) < \delta$$

ומכאן

$$\sum_{i=0}^{n+1} |f(x_{i+1}) - f(y_i)| < \varepsilon$$

אבל $[x_i, y_i] \in \Phi$ ולכן לכל i מתקיים

$$|f(y_i) - f(x_i)| < \eta |y_i - x_i|$$

ובסך הכל נקבל

$$|f(b) - f(a)| = |f(x_{n+1}) - f(y_0)| \le \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| \le$$
$$\le \varepsilon + \eta \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \le \varepsilon + \eta |b - a|$$

מאחר ולקחנו $\eta, \varepsilon > 0$ קטנים כרצוננו, נקבל כי $f(b) - f(a) = 0$. ■

משפט 2.12 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט. אזי f גזירה כמעט בכל מקום על $[a,b]$, f' אינטגרבילית על $[a,b]$ וכן

$$\int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

הוכחה: ראינו כי f גזירה כמעט בכל מקום, וכן כי f' אינטגרבילית (כלומר, כאשר נראה כי היא הפרש בין מונוטוניות נראה את זה).
נגדיר $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ להיות

$$g(x) = \int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t$$

ראינו כי g רציפה בהחלט, וכן ראינו כי $g'(x) = f'(x)$ כמעט בכל מקום. לכן $f - g$ רציפה בהחלט על $[a,b]$ וכן $(f-g)' = 0$ כמעט בכל מקום על $[a,b]$. לכן לפי הטענה הקודמת נקבל כי $f - g$ קבועה על $[a,b]$. כעת,

$$f(x) - \int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t = f(x) - g(x) = f(a) - g(a) = f(a)$$

ולכן קיבלנו מה שרצינו. ■

משפט 2.13 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה. אזי f רציפה בהחלט על $[a,b]$ אם ורק אם קיימת $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית כך שמתקיים

$$f(x) = \int_a^x h(t)\, \mathrm{d}t + f(a)$$

ובמקרה זה $h = f'$ כמעט בכל מקום על $[a,b]$.

הוכחה: אם f רציפה בהחלט על $[a,b]$ ראינו כי f' אינטגרבילית על $[a,b]$ וכן כי

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t-f(a)$$

בכיוון השני, אם קיימת h עם התכונה במשפט, ראינו כי f רציפה בהחלט על $[a,b]$. כמו כן, ראינו כי מהתכונה שלעיל נובע שכמעט בכל מקום

$$f'(x)=\left(\int_a^x h(t)\ \mathrm{d}t+f(a)\right)'=h(x)$$

ולכן סיימנו. ■

2.3 חזרה לפונקציות מונוטוניות

משפט 2.14 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית (עולה חלש). אזי $f'\geq 0$ מוגדרת כמעט בכל מקום, אינטגרבילית על $[a,b]$ וכן

$$\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t\leq f(b)-f(a)$$

כמו כן השוויון

$$\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t=f(b)-f(a)$$

מתקיים אם ורק אם f רציפה בהחלט על $[a,b]$, ובמקרה זה

$$\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

הוכחה: הוכחנו את הכל בטענה זו בעבר, חוץ מאשר שאם מתקיים השוויון

$$\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t=f(b)-f(a)$$

אזי f רציפה בהחלט ומתקיים

$$\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

אכן, לכל $a \leq x \leq b$, f מונוטונית עולה על $[a,x]$, $[x,b]$. לכן

$$\int\limits_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t \leq f(x) - f(a)$$

$$\int\limits_x^b f'(t)\ \mathrm{d}t \leq f(b) - f(x)$$

אם אחד מהאי שוויונים הללו חזק, נקבל

$$\int\limits_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t < f(b) - f(a)$$

וזו סתירה. לכן האי שוויונים הללו הם שוויונים, ומהראשון מביניהם נובע התנאי שיש להוכיח. מכאן אנו מסיקים גם כי f רציפה בהחלט. ∎

הגדרה 2.15 פונקציה מונוטונית $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים $f' = 0$ כמעט בכל מקום על $[a,b]$ נקראת פונקציה סינגולרית.

דוגמה פונקציית קנטור $C : [0,1] \to [0,1]$ מונוטונית עולה ורציפה, ומקיימת $C' = 0$ כמעט בכל מקום על $[0,1]$. לכן

$$\int\limits_0^1 C' = 0 \neq 1 = C(1) - C(0)$$

והיא פונקציה סינגולרית.

הערה 2.16 אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית רציפה בהחלט וסינגולרית אזי f קבועה על $[a,b]$ (כי $f(x) - f(a) = \int_a^x f' = 0$).

טענה 2.17 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה מונטונית עולה. אזי קיימות ויחידות פונקציות מונוטוניות $f_a, f_s : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$f_a(a) = 0, f = f_a + f_s$$

f_a רציפה בהחלט על $[a,b]$, f_s סינגולרית על $[a,b]$ והן נתונות על ידי

$$f_a(x) = \int\limits_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$$

$$f_s(x) = f - f_a(x)$$

הוכחה: יחידות: נניח כי $f=\tilde{f}_a+\tilde{f}_s$ פירוק עם תכונות זהות. אזי

$$f_a-\tilde{f}_a=f_s-\tilde{f}_s$$

נסמן בתור φ את הפונקציה המתוארת בשוויון זה. לפי צד ימין $\varphi'=0$ כמעט בכל מקום על $[a,b]$, ולפי צד שמאל φ רציפה בהחלט על $[a,b]$. לכן φ קבועה על $[a,b]$, ובפרט

$$\varphi(a)=f_a(a)-\tilde{f}_a(a)=0$$

לכן $\varphi=0$ על $[a,b]$, ומכאן היחידות.
קיום: תהיינה f_a,f_b כמו בתיאור בסוף הטענה. ברור כי $f_a(a)=0$, f_a רציפה בהחלט ומונוטונית (כי $f'\geq 0$ כמעט בכל מקום). כמו כן, ברור כי

$$f_a'=f'$$

כמעט בכל מקום. לכן $f_s'=0$ כמעט בכל מקום על $[a,b]$. נותר לבדוק כי $f(s)$ מונוטונית על $[a,b]$. יהיו $a\leq x\leq y\leq b$, ונקבל

$$f_s(y)-f_s(x)=\left(f(y)-\int_a^y f'\right)-\left(f(x)-\int_a^x f'\right)=(f(y)-f(x))-\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\geq 0$$

והאי שוויון האחרון נובע מטענה שראינו כבר על פונקציות מונוטוניות. ■