פונקציות ממשיות

ⓒ ארזים

15 בינואר 2017

1 מרחבי L^p

תזכורת יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. $L^p = L^p(X,\Sigma,\mu)$ מסמן את מרחב הפונקציות המדידות $f : X \to \mathbb{C}$ שמקיימות

$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu$$

עבור $f \in L^p$ מסמנים

$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu}$$

ראינו את אי שוויון הלדר:

$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \le ||f||_p \, ||g||_q$$

כאשר כאן $1 < p, q < \infty$ צמודים וכן $f \in L^p, g \in L^q$. כמו כן ראינו את אי שוויון מינקובסקי:

$$||f+h||_p \le ||f||_p + ||h||_p$$

כאשר $1 \le p < \infty$, $f,h \in L^p$. כמובן ברור כי באותם תנאים, כאשר $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$||\lambda f||_p = |\lambda| \, ||f||_p$$

1.1 מחלקות שקילות על פונקציות מדידות

נסמן בתור M את אוסף הפונקציות המדידות $f : X \to \mathbb{C}$. נגדיר על M יחס:

$$f \sim g \iff f \overset{a.e.}{=} g$$

תכונות

1. זהו יחס שקילות. נסמן $M/\sim$ את אוסף מחלקות השקילות.
2. אם $f\sim g$ אזי $\lambda f\sim\lambda g$. אם גם $h\sim k$ אזי $f+h\sim g+k$, ולכן $M/\sim$ הופך למרחב ווקטורי.
3. אם $f\sim g$ אזי לכל $1\leq p<\infty$ מתקיים

$$\int|f|^p=\int|g|^p$$

ולכן מוגדרת היטב הפונקציה:

$$M/\sim\ni\dot{f}\to\int\limits_X|f|^p\ \mathrm{d}\mu$$

כאשר $f\in\dot{f}$.

4. אם $f\sim g$ אז f אינטגרבילית אם ורק אם g אינטגרבילית, ובמקרה זה $\int f=\int g$.

זהירות נהוג לעיתים לדבר על אברי $M/\sim$ כפונקציות, אבל עבור $\dot{f}\in M/\sim$ לא מוגדר בדרך כלל הערך של f בנקודה $x_0\in X$.

הגדרה 1.1 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה. $L^p=L^p(X,\Sigma,\mu)$ הוא אוסף כל האיברים $\dot{f}\in M/\sim$ כך שמתקיים

$$\int\limits_X|f|^p\ \mathrm{d}\mu<\infty$$

כאשר $f\in\dot{f}$, ומספיק לבדוק נציג אחד. במצב זה מסמנים

$$||f||_p=\sqrt[p]{\int\limits_X|f|^p\ \mathrm{d}\mu}$$

כאשר כאן הכוונה לכתוב

$$\left|\left|\dot{f}\right|\right|_p=\sqrt[p]{\int\limits_X|f|^p\ \mathrm{d}\mu}$$

כאשר $f\in\dot{f}\in L^p$.

הערה 1.2 לאור זאת, L^1 הוא אוסף מחלקות השקילות של פונקציות אינטגרביליות.

תכונות

1. $||f||_p = 0$ אם ורק אם $f = 0$ כמעט בכל מקום, עבור $f \in L^p$. הכוונה היא $\left|\left|\dot{f}\right|\right|_p = 0$ אם ורק אם $f = 0$ כמעט בכל מקום עבור $f \in \dot{f}$, ומספיק לבדוק נציג אחד.
2. לכל $f \in L^p$, $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$||\lambda f||_p = |\lambda| \, ||f||_p$$

3. לכל $f, g \in L^p$ מתקיים

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

4. לאור שתי התכונות הקודמות L^p הוא מרחב נורמי.
5. אי שוויון הלדר: עבור $f \in L^p, g \in L^q$, כאשר $1 < p, q < \infty$ צמודים, מתקיים

$$||fg||_1 \leq ||f||_p + ||g||_q$$

הערה 1.3 המרחב L^2 הופך למרחב מכפלה פנימית עם המכפלה

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_X f\overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

הערה 1.4 יהי $(V, ||\cdot||)$ מרחב נורמי. נגדיר

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to [0, \infty) \\ d\left(x, y\right) &= ||x - y|| \end{aligned}$$

זאת מטריקה (מיידי).

מסקנה 1.5 L^p, עבור $1 \leq p < \infty$, הופך למרחב מטרי עם המטריקה

$$d\left(f, g\right) = ||f - g||_p$$

1.2 התכנסות

טענה 1.6 (אי שוויון צ'בישב) אם $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה, אזי לכל $\varepsilon > 0$

$$\mu\left(\left\{x \in X \mid \left|f\left(x\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu}{\varepsilon^p} = \left(\frac{||f||_p}{\varepsilon}\right)^p$$

הוכחה:

$$\int |f|^p \geq \int |f|^p \chi_{|f| \geq \varepsilon} \geq \varepsilon^p \mu \left(|f| \geq \varepsilon\right)$$

■

מסקנה 1.7 נניח כי $f_n \to f$ במטריקה של L^p, ונקח נציגים מתאימים. אזי לכל $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu \left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{||f_n - f||}{\varepsilon}\right)^p = 0$$

כלומר $f_n \to f$ במידה. בפרט יש תת סדרה $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ עבורה $f_{n_j} \to f$ כמעט במידה שווה, ובפרט $f_{n_j} \to f$ μ־כמעט בכל מקום.

1.3 שלמות

הגדרה 1.8 יהי (X, d) מרחב מטרי. סדרת קושי במרחב X היא סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה

$$\lim_{m,n\to\infty} d\left(x_m, x_n\right) = 0$$

הגדרה 1.9 מרחב מטרי נקרא שלם אם לכל סדרת קושי יש גבול.

הערה 1.10 אם X מרחב מטרי, $\{x_n\}$ סדרת קושי, אזי קיימת תת סדרה $\left\{x_{n_j}\right\}$ כך שמתקיים

$$d\left(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}\right) < \frac{1}{2^j}$$

הוכחה: לכל j קיים n_j עבורו אם $m, n \geq n_j$ מתקיים $d\left(x_m, x_n\right) < \frac{1}{2^j}$. לכן ברקורסיה נוכל לשנות את הערכים ולקבל $n_j < n_{j+1}$. ■

הערה 1.11 אם $\{x_n\}$ סדרת קושי, $\left\{x_{n_j}\right\} \to x$ תת סדרה מתכנסת, אזי גם $\{x_n\} \to x$ סדרה מתכנסת.

משפט 1.12 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה, ויהי $1 \leq p < \infty$. אזי $L^p = L^p\left(X, \Sigma, \mu\right)$ מרחב שלם.

הוכחה: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. על ידי מעבר לתת סדרה, נוכל להניח כי

$$||f_{n+1} - f_n||_p \leq \frac{1}{2^n}$$

נגדיר פונקציה

$$g = |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| : X \to [0, \infty]$$

אזי

$$\int g^p < \infty$$

אכן, אם נסמן

$$g_k = |f_1| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1} - f_n|$$

אזי $g_k \nearrow g$, ולכן

$$\int g_k^p \to \int g^p$$

אבל $g_k \in L^p$, וכן

$$||g_k||_p \leq ||f_1||_p + \sum_{n=1}^{k} ||f_{n+1} - f_n||_p \leq ||f_1||_p + 1$$

מכאן נובע כי

$$\int g_k^p \leq ||g_k||_p^p \leq \left(||f_1||_p + 1\right)^p$$

ולכן

$$\int g^p \leq \left(||f_1||_p + 1\right)^p$$

בפרט, $g < \infty$ כמעט בכל מקום. לכן, הטור

$$f = f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$$

מתכנס (בהחלט) כמעט בכל מקום. מתקיים $|f| \leq |g|$ כמעט בכל מקום, ובפרט $f \in L^p$. מכאן, $f_n \to f$ כמעט בכל מקום. לבסוף, $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$, וכן $|f_n - f|^p \to 0$ כמעט בכל מקום. לפי משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג (לאור $\int (2g)^p < \infty$) נובע כי

$$\int_X |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \to 0$$

כלומר $||f_n - f||_p \to 0$, כלומר $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} f$. ■

הגדרה 1.13 מרחב נורמי שלם נקרא מרחב בנך. מרחב מכפלה פנימית שלם נקרא מרחב הילברט.

מסקנה 1.14 L^p הוא מרחב בנך, לכל $1 \leq p < \infty$. L^2 הוא מרחב הילברט.

1.4 צפיפות הפונקציות הפשוטות

הערה 1.15 בפרק זה פונקציה פשוטה היא פונקציה מרוכבת (לא בהכרח חיובית)

$$s = \sum_{i=1}^{n} z_i \chi_{A_i}$$

כאשר $z_i \in \mathbb{C}$, A_i מדידות. ניקח אותן זרות בזוגות, וכן $z_i \neq 0$ לכל i. אזי

$$\int |s|^p = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^p \, \mu\left(A_i\right)$$

לכן $s \in L^p$ אם ורק אם $\mu\left(A_i\right) < \infty$.

הגדרה 1.16 יהי X מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$. A נקראת צפופה אם $\overline{A} = X$. כלומר, אם לכל $x \in X$ יש $a_n \in A$ עם $a_n \to x$.

כעת נניח כי $(V, ||\cdot||)$ מרחב נורמי. יהי $M \subseteq L$ תת מרחב ווקטורי. אזי $\overline{M} \subseteq L$ תת מרחב ווקטורי. אכן, אם $M \ni x_n \to x$, $M \ni y_n \to y$, אזי

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leq ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \to 0$$

וכמובן שמתקיים $\lambda x_n \to \lambda x$.

טענה 1.17 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה. אזי אוסף הפונקציות הפשוטות במרחב L^p צפוף במרחב L^p.

הוכחה: נסמן בתור S את אוסף הפונקציות הפשוטות במרחב L^p. יש להראות כי $\overline{S} = L^p$. מתקיים $\overline{S} \subseteq L^p$ תת מרחב ווקטורי.

בשלב הזה אשר מחק את הלוח. משתמשים במשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג עם קירוב סטנדרטי של פונקציה על ידי פונקציות פשוטות. מראים עבור פונקציה אי שלילית בגלל שאמרנו כי $\overline{S}$ מרחב ווקטורי. אפשר להשלים מהאינטרנט את השאר. ∎

1.5 רציפות בהחלט של האינטגרל

יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה.

טענה 1.18 תהי $f : X \to \mathbb{C}$ מדידה כך שמתקיים

$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu$$

אזי לכל $\varepsilon > 0$:

1. קיים $\delta>0$ כך שאם $E\subseteq X$ מדידה ומקיימת $\mu(E)<\delta$ אזי $\int_E |f|^p<\varepsilon$.
2. קיימת $A\subseteq X$ מדידה כך שמתקיים $\mu(A)<\infty$ וכן

$$\int\limits_{A^c} |f|^p<\infty$$

הוכחה: על ידי החלפת f עם $|f|^p$, אפשר להניח כי $f\geq 0$ וכן $p=1$. תהי $0\leq s\leq f$ פשוטה עם

$$\int\limits_X f\leq \int\limits_X s+\frac{\varepsilon}{2}$$

אזי

$$\int\limits_X f-s\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן לכל $F\subseteq X$ מדידה, מתקיים

$$\int\limits_F f-s\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

כלומר

$$\int\limits_F f\leq \int\limits_F s+\frac{\varepsilon}{2}$$

לכן אפשר להחליף את f באותה s, ולהניח כי $f\geq 0$ פשוטה.
כעת, f פשוטה, ולכן חסומה - ולכן סעיף 1 ברור.
לגבי סעיף 2, נשתמש בסימונים לעיל על פונקציות פשוטות

$$s=\sum_{i=1}^n z_i\chi_{A_i}$$

עם A_i זרות בזוגות, $z_i\neq 0$. אזי

$$\mu(A_i)<\infty$$

כי $\int s<\infty$, וניקח

$$A=\bigcup_{i=1}^n A_i$$

אזי

$$s\mid_{A^c}=0$$

וסיימנו. ■

1.6 הערה על L^∞

הגדרה 1.19 לכל פונקציה מדידה $f:X\to\mathbb{C}$ אומרים כי f essentially bounded אם קיים $t\geq 0$ כך שמתקיים

$$\mu\left(\{|f|>t\}\right)=0$$

במקרה זה מסמנים

$$||f||_\infty=\inf\left\{t\geq 0\mid \mu\left(\{|f|>t\}\right)=0\right\}$$

אם $g\sim f$ אזי f essentially bounded אם ורק אם g essentially bounded, ובמקרה זה

$$||f||_\infty=||g||_\infty$$

L^∞ מוגדר כאוסף מחלקות השקילות של פונקציות מדידות שהן essentially bounded עם הנורמה $f\to||f||_\infty$.

תהי $f\in L^\infty$. יש $t_n\searrow||f||_\infty$ עם

$$\mu\left(\{|f|>t_n\}\right)=0$$

מאחר ומתקיים

$$\{|f|>||f||_\infty\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|f|>t_n\}$$

ולכן נקבל

$$\mu\left(\{|f|>||f||_\infty\}\right)=0$$

לכן עבור $f\in L^\infty$ יש נציג עבורו $|f|\leq||f||_\infty$ בכל מקום.

לפי אותם שיקולים, אם $\left\{\dot{f}_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ קבוצה בת מנייה של איברי L^∞, אזי קיימים נציגים $f_\lambda \in \dot{f}_\lambda$ כך שמתקיים

$$\sup_X |f_\lambda| \le ||f_\lambda||_\infty$$

וכן

$$\sup_X |f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}| \le ||f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}||_\infty$$

בפרטט, נובע כי L^∞ מרחב שלם.
לפי אי שוויון הלדר:

$$||fg||_1 \le ||f||_1 \, ||g||_\infty$$
$$\int |fg| \le \int |f| \sup |g| \le \int |f| \, ||g||_\infty$$

2 $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$

הקדמה

הגדרה 2.1 יהיו $(X, d_x), (Y, d_y)$ מרחבים מטריים, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה. אומרים כי f רציפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ עבורו

$$d_x(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

נדון במרחב $\mathbb{R}^d$ עם מידת לבג.

2.1 $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$

הגדרה 2.2 $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ הוא אוסף הפונקציות הרציפות $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ כך שהקבוצה $\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\right\}$ חסומה. מסמנים גם

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}$$

לכל f. אזי פונקציה רציפה שייכת לאוסף $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ אם ורק אם $\text{supp} f$ קומפקטית (כלומר סגורה וחסומה - סגורה יש אוטומטית).
כמו כן, מסמנים

$$C_c^+\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right) \mid f \ge 0\right\}$$

תכונות תהי $f \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$. אזי:

1. f חסומה, $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ לכל $1 \leq p < \infty$, וכן f רציפה במידה שווה.
2. לכל פונקציה $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ולכל $u \in \mathbb{R}$ נגדיר פונקציה מוזזת $f_u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ על ידי

$$f_u(x) = f(x-u)$$

אם $f \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי הפונקציה $\mathbb{R}^d \to L^p : u \to f_u$ היא רציפה במידה שווה.

הוכחה: די להוכיח רציפות בנקודה $u = 0$. אכן,

$$||f_u - f_{u'}||_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-u) - f(x-u')|^p \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(y-u-u') - f(y)|^p \,\mathrm{d}y = \\ = ||f_{u-u'} - f_0||_p^p$$

כעת נסמן $S = \mathrm{supp} f$, וכן

$$S_1 = S + B_{\mathbb{R}^d}(0,1) = \{s + x \mid s \in S, x \in B(0,1)\}$$

זו קבוצה פתוחה.

יהי $\varepsilon > 0$. מרציפות במידה שווה של f קיים $0 < \delta < 1$ עבורו

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|^p < \frac{\varepsilon}{\mu(S_1)}$$

יהי $u \in \mathbb{R}^d$ עם $||u|| < \delta$. אזי

$$||f_u - f||_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-u) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int\limits_{S_1} |f(x-u) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \mu(S_1)\frac{\varepsilon}{\mu(S_1)} = \varepsilon$$

■

2.2 צפיפות $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ במרחב $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$

הערה 2.3 יהי (X,d) מרחב מטרי. לכל $A \subseteq X$ סגורה, סימנו

$$\mathrm{dist}(\cdot, A) : x \to [0,\infty) : x \to \mathrm{dist}(x,a) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$$

יישום הלמה של אוריסון במרחבים מטריים - יהי (X,d) מרחב מטרי, $A, B \subseteq X$ סגורות וזרות. אזי קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [0,1]$ עם $f\mid_A = 0, f\mid_B = 1$.

הוכחה: נשים לב כי לכל $x \in X$ מתקיים $\operatorname{dist}(x,A)+\operatorname{dist}(x,B)>0$, שכן $A \cap B = \emptyset$. לכן ניקח

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

■

משפט 2.4 $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ צפופה בתוך $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבור $1 \le p < \infty$.

הוכחה: $\overline{C_c\left(\mathbb{R}^d\right)}$ תת מרחב וקטורי של L^p. די להראות שהוא מכיל כל פונקציה אופיינית $\chi_E \in L^p$, כאשר E מדידה, כי אז נובע שכל פונקציה פשוטה נמצאת בו, ולכן גם הסגור של הפונקציות הפשוטות - שהוא כל L^p.

ראשית נראה שאפשר להניח כי E חסומה. מאחר ומתקיים $\chi_E \in L^p$, מתקיים גם

$$||\chi_E||_p^p = m(e) < \infty$$

לכן מתקיים

$$\left|\left|\chi_{E\cap B(0,n)}-\chi_E\right|\right|_p^p = m\left(E\backslash\left(E\cap B(0,n)\right)\right) \to 0$$

לכן נוכל להניח כי E חסומה - כי $\chi_{E\cap B(0,n)}$ שואפות בנורמת L^p אל χ_E.

יהי n עבורו $E \subseteq B(0,n)$. יהי $\varepsilon > 0$. קיימות $F \subseteq E \subseteq G$, כאשר F סגורה, G פתוחה, וכן $m(G\backslash F) < \varepsilon^p$. אפשר גם להניח כי $G \subseteq B(0,n)$. קיימת $f:\mathbb{R}^d \to [0,1]$ רציפה כך שמתקיים $f\mid_F = 1, f\mid_{G^c} = 0$. אזי $f \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ וכמו כן

$$||f-\chi_E||_p^p = \int\limits_{G\backslash F} |f-\chi_E|^p \, \mathrm{d}m \le m(G\backslash F) < \varepsilon^p$$

לכן $||f-\chi_E||_p < \varepsilon$. ■

2.3 הזזות

טענה 2.5 יהי $1 \le p < \infty$, $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$.

1. לכל $u \in \mathbb{R}^d$, $f_u \in L^p$, $||f_u||_p = ||f||_p$.
2. הפונקציה $u \to f_u : \mathbb{R}^d \to L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ רציפה במידה שווה.

הוכחה:

1. טריוויאלי מאינווריאנטיות מידת לבג להזזות.

2. יהי $\varepsilon > 0$. קיימת $\varphi \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $||f-\varphi||_p < \frac{\varepsilon}{3}$. אזי

$$||f_u - \varphi_u||_p = ||(f-\varphi)_u||_p = ||f-\varphi||_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

ראינו כי $\varphi_u : u \to \varphi_u$ $\mathbb{R}^d \to L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ רציפה במידה שווה. לכן ניקח δ עבורו

$$||u-u'|| < \delta \Rightarrow ||\varphi_u - \varphi_{u'}||_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

ואז נובע גם

$$||f_u - f_{u'}|| \leq ||f_u - \varphi_u||_p + ||\varphi_u - \varphi_{u'}||_p + ||\varphi_{u'} - f_{u'}||_p < \varepsilon$$

■

3 נקודות לבג וגזירת אינטגרל

3.1 למת כיסוי של ויטלי

סימון נסמן

$$l\left([a,b]\right) = b-a$$

הגדרה 3.1 תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה. אוסף של Φ של קטעים מכסה את E במובן של ויטלי אם:

1. Φ הוא אוסף של קטעים סגורים וחסומים $[a,b]$ ולא מנוונים, במובן שמתקיים $-\infty < a < b < \infty$.
2. לכל $x \in E$ ולכל $\delta > 0$ קיים $I \in \Phi$ כך שמתקיים $x \in I$, $l\left(I\right) < \delta$.

למה 3.2 תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה עם $m^*\left(E\right) < \infty$. יהי Φ אוסף של קטעים המכסים את E במובן של ויטלי. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימים קטעים $I_1, \ldots, I_k \in \Phi$ זרים בזוגות כך שמתקיים

$$m^*\left(E \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right)\right) < \varepsilon$$

הוכחה: קיימת $G \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה עם $E \subseteq G$ וכן $m(G) < \infty$. מאחר והקבוצה G פתוחה, אוסף הקטעים בתוך Φ המוכלים בה עדיין מכסה את E במובן של ויטלי. לכן נניח שכל קטע של Φ נמצא בתוך G. במצב זה, אם $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ קטעים מתוך Φ זרים בזוגות, מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \le m(E) < \infty$$

בנוסף, עבור תת קבוצה סופית כלשהו $\{I_1, \ldots, I_k\} \subseteq \Phi$, מאחר והקבוצה $I_1 \cup \cdots \cup I_k$ סגורה, נובע מתכונת הכיסוי של ויטלי כי

$$E \backslash \left(\bigcup_{n=1}^{k} I_n\right) \subseteq \bigcup \left\{ I \in \Phi \mid I \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k} I_n\right) = \emptyset \right\}$$

אפשר להניח כי E אינו מוכל באיחוד סופי וזר בזוגות של קטעים מתוך Φ (אחרת ההוכחה טריוויאלית).

נבנה סדרת קטעים באינדוקציה. יהי $I_1 \in \Phi$ כלשהו. כעת נניח כי בנינו כבר את $I_1, \ldots, I_j$. אזי קיים קטע $I \in \Phi$ עם

$$I \cap \left(\bigcup_{n=1}^{j} I_n\right) = \emptyset$$

נסמן

$$\alpha_j = \sup \left\{ l(I) \mid I \cap \left(\bigcup_{n=1}^{j} I_j\right) = \emptyset, I \in \Phi \right\} > 0$$

יהי $I_{j+1} \in \Phi$ כך שמתקיים

$$I_{j+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{j} I_j\right) = \emptyset$$

וכן

$$l(I_{j+1}) > \frac{\alpha_j}{2}$$

הקטעים בסדרה האינסופית $I_1, I_2, \ldots$ זרים בזוגות ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \infty$$

בפרט, $l\left(I_n\right)\to 0$ ומכאן נובע גם כי $\alpha_n\to 0$. לכל $I\in\Phi$ נסמן בתור $\tilde{I}$ קטע סגור בעל אותו מרכז כמו I ועם $l\left(\tilde{I}\right)=5l\left(I\right)$. נראה שלכל j מתקיים

$$E\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{j}I_n\right)\subseteq\bigcup_{n=j+1}^{\infty}\tilde{I_n} \tag{1}$$

מכאן נסיק כי

$$m^*\left(E\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{j}I_n\right)\right)\leq 5\sum_{n=j+1}^{\infty}l\left(I_n\right)$$

ומאחר ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}l\left(I_n\right)<\infty$$

נקבל שמתקיים

$$m^*\left(E\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{j}I_j\right)\right)\to 0$$

ומכאן הטענה.

נותר להוכיח את (1). תהי $x\in E\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{j}I_n\right)$. יהי $I_0\in\Phi$ כך שמתקיים $x\in I_0$ וכן

$$I_0\cap\left(\bigcup_{n=1}^{j}I_n\right)=\emptyset$$

כעת, קיים $l>j$ כל שמתקיים $I_0\cap I_l\neq\emptyset$. אחרת, היה נובע כי לכל j מתקיים $I_0\cap I_j=\emptyset$, ומכאן $\alpha_j\geq l\left(I_0\right)$ לכל j, בסתירה לכך שמתקיים $\alpha_j\to 0$.

נקח l מינימלי כך שמתקיים $I_0\cap I_l\neq\emptyset$, אזי $l>j$. מתקיים

$$I_0\cap\left(\bigcup_{n=1}^{l-1}I_n\right)=\emptyset$$

לכן $\alpha_{l-1}\geq l\left(I_0\right)$. אבל

$$l\left(I_0\right)>\frac{\alpha_{l-1}}{2}$$

ולכן

$$2l\left(I_l\right)>l\left(I_0\right)$$

מאחר ומתקיים $I_0\cap I_l\neq\emptyset$ נובע כי $I_0\subseteq\tilde{I}_l$, ולכן $x\in I_0\subseteq\tilde{I}_l$. ■