

פונקציות ממשיות

© ארזים

30 באוקטובר 2016

1 סימונים

הגדרה 1.1 נאמר שקבוצה A היא בת מניה אם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית $f: A \rightarrow \mathbb{N}$.
בפרט, אם A סופית (או ריקה - בפרט סופית), אזי A בת מניה.

הגדרה 1.2 מערכת המספרים הממשיים המורחבת היא \mathbb{R} בתוספת שני סימונים: $+\infty, -\infty$.

1.1 הגדרות ישנות

יחס סדר: לכל a במערכת המורחבת, $-\infty \leq a \leq \infty$.
סימוני קטעים: כל המערכת $[-\infty, \infty]$, קטע $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, $a, x, b \in [-\infty, \infty]$.

אינפימום וסופרימום: לכל תת קבוצה $\emptyset \neq A \subseteq [-\infty, \infty]$ קיימים איברים יחידים $\inf A, \sup A \in [-\infty, \infty]$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $\inf A \leq x \leq \sup A$, וכן $\sup A$ הוא המספר המורחב הקטן (הגדול) ביותר עם תכונה זו.
אם $\sup A \in A$, נסמנו $\max A$. אם $\inf A \in A$, נסמנו $\min A$.
גבול עליון וגבול תחתון: עבור $a_1, a_2, \dots \in [-\infty, \infty]$ סדרה, נגדיר

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{k \geq 1} \left(\sup_{m \geq k} a_m \right) \in [-\infty, \infty]$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{k \geq 1} \left(\inf_{m \geq k} a_m \right) \in [-\infty, \infty]$$

אם שני אלה שווים, נסמן את הערך המשותף בתור

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

1.1.1 פעולות

• כפל: עבור $a, b \in [-\infty, \infty]$ נגדיר $ab \in [-\infty, \infty]$ באופן הבא:

- אם $a, b \in \mathbb{R}$ כרגיל.

- לכל $x \in [-\infty, \infty]$, $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

- אם $a \in (0, \infty]$ אזי $a \cdot (-\infty) = -\infty = (-\infty) \cdot a$, $a \cdot \infty = \infty = \infty \cdot a$
 - אם $b \in [-\infty, 0)$ אזי $b \cdot (-\infty) = \infty = (-\infty) \cdot b$, $b \cdot \infty = -\infty = \infty \cdot b$

• חיבור: עבור $a, b \in [-\infty, \infty]$ נגדיר $a + b \in [-\infty, \infty]$ באופן הבא:

- אם $a, b \in \mathbb{R}$ כרגיל.
 - אם $a \neq -\infty$ אז $a + \infty = \infty = \infty + a$
 - אם $b \neq \infty$ אז $b + (-\infty) = b - \infty = -\infty = -\infty + b$
 - הביטויים הבאים לא מוגדרים: $(-\infty) - (-\infty)$, $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\infty + (-\infty)$.

הערה 1.3 על $[0, \infty]$ מתקיים $a(b+c) = ab+ac$

1.1.2 סכומים אי שליליים (אינסופיים בעיקר)

תהי I קבוצת אינדקסים, ויהיו נתונים איברים $a_i \in [0, \infty]$ לכל $i \in I$. נסמן:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{\substack{S \subseteq I \\ |S| \in \mathbb{N}}} \left\{ \sum_{i \in S} a_i \right\} \in [0, \infty]$$

תכונות:

1. אם $I = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ איחוד זר, אזי

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} a_i \right)$$

2. אם נתונים a_1, a_2, \dots מתוך $(0, \infty)$, אזי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \in [0, \infty]$$

כאשר הסכום השמאלי הוא במובן שאנחנו מכירים מחדו"א 1.

3. אם קיים $i \in I$ כך שמתקיים $a_i = \infty$ אז $\sum_{i \in I} a_i = \infty$.

4. אם $\sum_{i \in I} a_i < \infty$, אזי $a_i \neq 0$ רק עבור קבוצה בת מניה של אינדקסים i .

2 מרחבים מטריים

2.1 מרחב מטרי

הגדרה 2.1 מרחב מטרי הוא זוג (X, d) , כאשר X קבוצה, d פונקציה,

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

כאשר $d(x, y)$ הוא המרחק בין x, y . צריכה לקיים:

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \quad .1$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad .2$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad .3$$

הערה 2.2 אומרים גם כי d מטריקה על X . תיתכנה מטריקות שונות על אותה קבוצה X . לעיתים כותבים X במקום (X, d) אם המטריקה d ברורה.

הערה 2.3 נובע כי לכל $x, y, z \in X$

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

משום שמתכונה 3 נובע כי

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$$

ועל ידי החלפת x עם y :

$$d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x) = d(x, y)$$

הגדרה 2.4 אם $X_1 \subseteq X$ תת קבוצה אזי $X_1 \times X_1 \subseteq X \times X$, וצמצום d על $X_1 \times X_1$, כלומר הפונקציה

$$d_1 := d|_{X_1 \times X_1}: X_1 \times X_1 \rightarrow [0, \infty)$$

היא מטריקה על X_1 , הנקראת המטריקה המושרית על X_1 .

הערה 2.5 כדור פתוח שמרכזו x ורדיוסו r הוא

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

2.2 גבולות

הגדרה 2.6 יהי (X, d) מרחב מטרי, ותהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ סדרה, ויהי $x \in X$. אומרים שהסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול x , או שגבול הסדרה הוא x , אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

כאשר זהו גבול במובן של חדו"א 1.1. כותבים גם

$$x_n \rightarrow x, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

הערה 2.7 תת סדרות: אם $x_n \rightarrow x$, ותהי $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה (כלומר $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots$), אזי $x_{n_k} \rightarrow x$.

הערה 2.8 אם קיים גבול אז הוא יחיד. אכן, אן $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow x'$ אזי

$$0 \leq d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') \rightarrow 0 + 0 = 0$$

ולכן מכלל הסנדוויץ', $d(x, x') = 0$, כלומר $x = x'$.

הערה 2.9 אם $x_n \rightarrow x, d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, אזי $y_n \rightarrow x$, שכן

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) \rightarrow 0 + 0 = 0$$

2.3 קבוצות סגורות

יהי (X, d) מרחב מטרי.

הגדרה 2.10 $A \subseteq X$ נקראת סגורה אם לכל $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A, x_n \rightarrow x$, מתקיים $x \in A$. כלומר, A מכילה את כל הגבולות של סדרות מתוכה שמתכנסות לאיבר כלשהו מתוך X .

תכונות:

1. הקבוצות X, \emptyset הן סגורות.
2. חיתוך משפחה של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה (מיידי).
3. איחוד מספר סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה:
אכן, מספיק לבדוק שאם A, B סגורות אזי $A \cup B$ סגורה. נניח כי $x_n \rightarrow x, x \in A \cup B$. אזי קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל $k, x_{n_k} \in A$. כמו כן, יש תת סדרה $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ כך שלכל $l, x_{n_l} \in B$. במקרה הראשון, $x \in A \subseteq A \cup B$, ובשני $x \in B \subseteq A \cup B$.

הגדרה 2.11 תהי $A \subseteq X$. נסמן את הסגור של A בתור

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A, x_n \rightarrow x\}$$

תכונות:

1. $\bar{\emptyset} = \emptyset$
2. $A \subseteq \bar{A}$ (לכל $a \in A$ נקח סדרה קבועה $a_n = a$)

3. \bar{A} קבוצה סגורה: נניח כי $x \rightarrow x^{(j)} \in \bar{A}$. נרצה להראות כי $x \in \bar{A}$. לכל j קיים $A \ni x_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^{(j)}$. לכן יש $n(j)$ כך שמתקיים $d(x_n^{(j)}, x^{(j)}) < \frac{1}{j}$, ובפרט

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(x_n^{(j)}, x^{(j)}) = 0$$

אבל $x^{(j)} \rightarrow x$, ולכן $x \in \bar{A}$, כלומר $A \ni x_n^{(j)} \rightarrow x$.

מסקנה 2.12 היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את A (כי אם F סגורה וכן $A \subseteq F$ אזי $\bar{A} \subseteq F$).

הגדרה 2.13 אם $\bar{A} = X$ אומרים שהקבוצה A צפופה בתוך X .

הגדרה 2.14 אם קיימת קבוצה בת מניה וצפופה בתוך X , אומרים כי X ספרבילי. במילים אחרות, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $\overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = X$.

הערה 2.15 גם $X = \emptyset$ ספרבילי.

2.4 רציפות

הגדרה 2.16 יהיו X, Y מרחבים מטריים, ותהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה.

1. יהי $x \in X$. אומרים כי f רציפה בנקודה x אם

$$X \ni x_n \rightarrow x \in X \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$$

2. אומרים כי f רציפה אם f רציפה בכל נקודה $x \in X$.

הרכבה: תהי בנוסף $g : Y \rightarrow Z$ מרחב מטרי. אם f רציפה על x וכן g רציפה על $f(x)$, אזי $g \circ f$ רציפה.

הגדרה 2.17 אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה, חד-חד-ערכית ועל, וכן $f^{-1} : Y \rightarrow X$ רציפה, אזי f נקראת הומאומורפיזם (גם f^{-1} הומאומורפיזם).

הגדרה 2.18 אם מתקיים לכל $x_1, x_2 \in X$

$$d_x(x_1, x_2) = d_y(f(x_1), f(x_2))$$

אומרים כי f איזומטריה (כאן d_x היא המטריקה על X , d_y היא המטריקה על Y). במקרה זה f רציפה וחד-חד-ערכית. אם f על, אז f הומאומורפיזם (ואז f^{-1} גם איזומטריה).

2.5 קבוצות פתוחות

יהי (X, d) מרחב מטרי.

הגדרה 2.19 תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת פתוחה אם לכל $x \in A$ קיים $\varepsilon > 0$ עם $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

טענה 2.20 הקשר לקבוצות סגורות: $A \subseteq X$ פתוחה $\iff X \setminus A$ סגורה.

הוכחה: נסמן $F = X \setminus A$. נניח כי F לא סגורה. אז יש $x \in A$ ו- $x_n \in F$ כך ש- $x_n \rightarrow x$. לכן $x \in F$ לא פתוחה. נניח כי A לא פתוחה. אזי יש $x \in A$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq A$, כלומר יש $x_n \in F \cap B(x, \frac{1}{n})$. מכאן $x_n \rightarrow x \in A$ ולכן F לא סגורה. ■

מסקנה 2.21 תכונות של קבוצות פתוחות:

1. \emptyset, X פתוחות.

2. איחוד משפחה כלשהי של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה.

3. חיתוך כמות סופית של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

הגדרה 2.22 יהי (X, d) מרחב מטרי. אוסף הקבוצות הפתוחות בתוך X נקרא הטופולוגיה המוגדרת על ידי (X, d) , ומסומן $T_{(X,d)}$ או T_x .

הערה 2.23 כדור פתוח $B(x, r)$ הוא תמיד קבוצה פתוחה, שכן אם $y \in B(x, r)$ אזי $d(x, y) < r$ ואז $B(y, r - d(x, y)) \subseteq B(x, r)$.

הערה 2.24 מושג הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ במרחב מטרי X תלוי רק בטופולוגיה, כי $x_n \rightarrow x$ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה $A \in T_x$ קיים N כך שעבור $n \geq N$ מתקיים $x_n \in A$.

תתי מרחב וקבוצות פתוחות

טענה 2.25 יהי (X, d) מרחב מטרי, $Y \subseteq X$ תת מרחב (הופך למרחב מטרי עם המטריקה המושרית). תהי $B \subseteq Y$. אזי B פתוחה בתוך Y אם ורק אם קיימת $A \subseteq X$ פתוחה כך שמתקיים $A \cap Y = B$. במילים: הקבוצות הפתוחות של Y הן החיתוכים של כל הקבוצות הפתוחות של X עם Y .

הוכחה: נניח כי קיימת A כזו. יהי $y \in B$, אזי $y \in A$ ולכן יש $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $B_X(y, \varepsilon) \subseteq A$. אבל $B_Y(y, \varepsilon) = Y \cap B_X(y, \varepsilon) \subseteq Y \cap A = B$. בכיוון השני, נניח כי B פתוחה. כלומר, לכל $y \in B$ קיים $\varepsilon_y > 0$ המקיים

$$B_Y(y, \varepsilon_y) \subseteq B$$

אזי $B_X(y, \varepsilon_y)$ מקיים

$$y \in B_X(y, \varepsilon_y), B_X(y, \varepsilon_y) \cap Y = B_Y(y, \varepsilon_y) \subseteq B$$

נקח

$$A = \bigcup_{y \in B} B_X(y, \varepsilon_y)$$

■ אזי $B \subseteq A$, ולכן $A \cap Y \subseteq B$, ולכן $A \cap Y = B$.

ספרביליות

טענה 2.26 יהי X ספרבילי, ונניח כי $\overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = X$. נסתכל על האוסף הבא של כדורים פתוחים

$$\{B(x_i, r) \mid i \in \mathbb{N}, 0 < r \in \mathbb{Q}\}$$

זהו אוסף בן מניה של כדורים פתוחים, וכל קבוצה פתוחה של X היא איחוד של כדורים מאוסף זה. **הוכחה:** תהי $O \subseteq X$ קבוצה פתוחה. יהי $x \in O$. אזי יש $\delta > 0$ המקיים $B(x, \delta) \subseteq O$. קיים $x_i \in B(x, \frac{\delta}{3})$. ניקח r רציונאלי המקיים $\frac{\delta}{3} < r < \frac{2\delta}{3}$. אזי

$$x \in B\left(x_i, \frac{\delta}{3}\right) \subseteq B(x_i, r) \subseteq B(x, \delta) \subseteq O$$

■ לכן לכל $x \in O$ יש כדור מהאוסף לעיל שמכיל אותו ונמצא כולו בתוך O .

2.6 הממשיים

$$d(x, y) = |x - y| \text{ ניקח את המטריקה הרגילה: } \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

טענה 2.27 תהי $O \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה פתוחה. אזי קיים איחוד זר יחיד

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$$

כאשר Λ בת מניה ולכל λ מתקיים $-\infty \leq a_\lambda < b_\lambda \leq \infty$, וכן $\{(a_\lambda, b_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ הוא בדיוק אוס, הקטעים המקסימליים הנמצאים בתוך O .

הוכחה: יחידות: אם $\lambda \in \Lambda$ אזי $b_\lambda \notin O$ (כי אחרת יש $\lambda_1 \in \Lambda$ עם $b_\lambda \in (a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1})$ ואז $\lambda_1 \neq \lambda$, אבל הקטעים $(a_\lambda, b_\lambda), (a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1})$ אינם זרים). לכן גם $a_\lambda \notin O$, ולכן הקטע (a_λ, b_λ) הוא מקסימלי בתוך O .

בכיוון ההפוך, יהי $I \subseteq O$ קטע מקסימלי. מאחר שהקבוצה O פתוחה, I קטע פתוח, כלומר $I = (a, b)$. קיים $\lambda \in \Lambda$ המקיים $(a, b) \cap (a_\lambda, b_\lambda) \neq \emptyset$. נשים לב כי $a_\lambda, b_\lambda \notin O$ (אחרת האיחוד אינו זר). לכן נובע כי $a_\lambda, b_\lambda \notin (a, b)$. מכאן נובע כי $(a, b) \subseteq (a_\lambda, b_\lambda)$, וממקסימליות נקבל $(a, b) = (a_\lambda, b_\lambda)$. הוכחנו כי בהינתן איחוד זר כזה, הוא בהכרח מורכב מהקטעים הפתוחים המקסימליים - לכן הוא יחיד.

קיום: יהי $x \in O$. קיים $\varepsilon > 0$ המקיים

$$B_{\mathbb{R}}(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq O$$

יהיו

$$a = \inf \{t \mid (t, x) \subseteq O\}, b = \sup \{t \mid (x, t) \subseteq O\}$$

אזי $x \in (a, b) \subseteq O$. אם a (בהתאמה b) סופי אזי $a \notin O$ (בהתאמה $b \notin O$). לכן (a, b) קטע מקסימלי בתוך O . נסמן $\{(a_\lambda, b_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ את אוסף הקטעים המקסימליים בתוך O (הם פתוחים - ראינו - וזרים בזוגות - מיידית). כעת

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda) = O$$

לבסוף, לכל $\lambda \in \Lambda$ יש מספר רציונלי $r_\lambda \in O \cap (a_\lambda, b_\lambda)$, ולכן יש העתקה חד-חד-ערכית

$$\begin{aligned} r : \Lambda &\rightarrow \mathbb{Q} \\ r(\lambda) &= r_\lambda \end{aligned}$$

ולכן Λ קבוצה בת מנייה.

2.7 סביבות

יהי (X, d) מרחב מטרי.

הגדרה 2.28 יהי $x \in X$, ותהי $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים (מיידית):

1. קיימת קבוצה פתוחה $O \subseteq X$ כך שמתקיים $x \in O \subseteq A$

2. קיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $B(x, \varepsilon) \subseteq A$

במקרה זה אומרים כי A סביבה של x .

מסקנה 2.29 $A \subseteq X$ קבוצה פתוחה אם ורק אם A סביבה של כל נקודה שלה.

הערה 2.30 מהתנאי הראשון נובע שאוסף הסביבות של x תלוי רק בטופולוגיה של X .

יש לשים לב כי סביבה של A לא חייבת להיות פתוחה.

הגדרה 2.31 סביבה פתוחה של x היא קבוצה פתוחה שהיא סביבה של x , כלומר קבוצה פתוחה A המכילה את x .

2.8 רציפות, סביבות, קבוצות פתוחות

טענה 2.32 יהיו X, Y מרחבים מטריים ותהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה.

1. עבור $x \in X$ התנאים הבאים שקולים:

- (א) f רציפה בנקודה x .
- (ב) לכל $\delta > 0$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $f(B(x, \varepsilon)) \subseteq B(f(x), \delta)$, או באופן שקול $B(x, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \delta))$.
- (ג) לכל סביבה $O \subseteq Y$ של $f(x)$, $f^{-1}(O)$ היא סביבה של x .

2. התנאים הבאים שקולים:

- (א) f רציפה.
- (ב) לכל $A \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(A) \subseteq X$ פתוחה.
- (ג) לכל $A \subseteq Y$ סגורה, $f^{-1}(A) \subseteq X$ סגורה.

מסקנה 2.33 רציפות $f : X \rightarrow Y$ תלויה רק בטופולוגיות של X ושל Y (שמוגדרות על ידי המטריקות).

מסקנה 2.34 תהיינה d, d' שתי מטריקות על X . אזי העתקת הזהות $id_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$ היא הומומורפיזם אם ורק אם הקבוצות הפתוחות של X ביחס למטריקות d, d' זהות, כלומר אם ורק אם הטופולוגיה של (X, d) זהה לזו של (X, d') .

2.9 מכפלות

הגדרה 2.35 יהיו (X_i, d_i) מרחבים מטריים עבור $i \in \{1, \dots, n\}$. נסמן:

$$X = \prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \forall 1 \leq i \leq n\}$$

נגדיר מטריקה על x על ידי

$$d_\infty((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$