1/2 2/11/2017

## הסתברות תרגול 2

$\Omega$ - מרחב מדגם, $A \subseteq 2^{\Omega}$ ה-$\sigma$ אלגברה הנוצרת ע"י $A$, $F$, היא ה-$\sigma$ אלגברה המינימלית (מבחינת הכלה) ש- $A \in F$.

**למשל:** $\Omega = [0,1]$ $G = \{[0, 2/3], [1/3, 1]\}$ נמצא את ה-$\sigma$ אלגברה הנוצרת מ- $G$ (~~[illegible]~~ נסמן $F$).

$$F = \{ \emptyset, \Omega, [0, 2/3], (2/3, 1], [1/3, 1], [0, 1/3),$$
$$[0, 1/3) \cup (2/3, 1], [1/3, 2/3] \}$$

מינימלית - הסכמנו רק על שלה:
לוקחים אותה - משלימים מה שצריך עד שכל האקסיומות מתקיימות.

**תרגיל**

יהי $(\Omega, F, P)$ מ"ה, $D \in F$, שעבורו מתקיים $P(D)>0$. נגדיר:

$$\forall A \in F. \quad Q(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$

האם $Q$ מידת הסתברות? כן!

נבדוק קיום אקסיומות:

1) $Q(\Omega) = \dfrac{P(D \cap \Omega)}{P(D)} = 1$ ✓

2) יהי $B_1, B_2, \ldots \in F$ זרים בזוגות

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cap D\right)}{P(D)} \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{=} \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (D \cap B_i)\right)}{P(D)} =$$

[illegible]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(D \cap B_i)}{P(D)} = \sum_{i=1}^{\infty} Q(B_i)$$

כי $Q$ מידת הסתבר.

2/2

תרגיל: יהיו $A,B$ מאורעות, הוכיחו:

$$\max\{0, P(A)+P(B)-1\} \le P(A\cap B) \le \min\{P(A), P(B)\}$$

צד ימין:

מונוט: אם $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

ולכן, $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$ וממונוטוניות של מידה נקבל:

$P(A\cap B)\le P(A)$ וגם $P(A\cap B)\le P(B) \to P(A\cap B)\le \min\{P(A),P(B)\}$

צד שמאל: תזכורת: לכל שני מאורעות:

$$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

ולכן, נזכור כי מתקיים $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ וכמובן $P(A\cup B)\le 1$

ולכן, $P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-1$

והיא שני הסתברות, $P(A\cap B)\ge 0$

ולכן, $P(A\cap B)\ge \max\{0, P(A)+P(B)-1\}$

תרגיל: יהיו $A,B$ זוג מאורעות כך ש: $P(A\cap B)\le P(A)\cdot P(B)$

הראו:

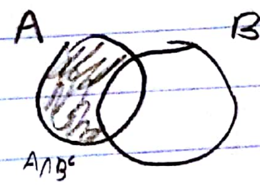
$$P(A^c\cap B^c)\le P(A^c)\cdot P(B^c)$$

אם היה אומר $\Downarrow$ $A,B$ ב"ת

פתרון:

נשים לב:

$P(A\cap B^c) = P(A)-P(A\cap B) \underset{\text{נתון}}{\ge} P(A)-P(A)\cdot P(B)$




$= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c)$

הראינו בעצם ש

$$P(A\cap B)\le P(A)\cdot P(B) \iff P(A)P(B^c)\le P(A\cap B^c)$$

ולכן, נבחר $B=B^c$ ונעשה בכיוון ההפוך

$P(A\cap B)\le P(A)\cdot P(B) \iff P(A^c\cap B^c)\le P(A^c)P(B^c)$

$\iff P(A\cap B^c)\ge P(A)P(B^c)$

שקולים אז $\lambda$

3/2

**מ"מ:** פונק' $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מדידה מעל $F$.

**דוגמא:**

3 הטלות מטבע: $\Omega=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_i\in\{T,H\}\}$ ב-$\Omega$ $2^3=8$ איברים.

נגדיר מאורע $A$: "יצאו" יותר $H$ מ-$T$.

$$A=\{HHH,\ HTH,\ THH,\ HHT\}$$

נגדיר σ-אלגברה הנוצרת מעל $A$:

$$F=\{\emptyset,\Omega,A,A^c\}$$

א. אם יוצאו יותר $H$ מ-$T$, אז זוכים ב-10 דולר.
נגדיר: $X$ סכום הזכייה. האם $X$ מדיד ביחס ל-$F$?

תשובה: כן! ניתן לומר: $X=10\cdot\mathbb{1}_A$ האינדיקטור של $A\subseteq\Omega$ מדיד אמ"מ $A\in F$.

מדיד: לכל $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
$X^{-1}(B)\in F$

ב. על כל $H$ שיוצא מקבלים 5 דולר. $Y$ הוא סכום הזכייה. האם $Y$ מדיד ביחס אל $F$? **לא!**

למשל, $Y^{-1}(\{15\})=\{HHH\}\notin F$

כעת ה-σ אלגברה היא $2^\Omega$. ($F=2^\Omega$ שינינו את $F$) האם $X,Y$ מדידים?

ניתן לוודא כי $X,Y$ ביחס ל-σ אלגברה זו.

נגדיר $Z$ סכום זכייה במשחק: אם יש יותר $H$, $5\$$ לכל $H$ שיצא, אחרת 0.
האם $Z$ מדיד ביחס ל-$2^\Omega$? כן.

$$Z=Y\cdot\mathbb{1}_A$$

מדיד כמכפלה מ"מ מדידים.