1'1

26/10/17

תרגול 1 הסתברות

רן סנציקובסקי
שרייבר 302
~~ransa~~
ransnit@gmail.com

סימון: עבור קבוצה A : $A \subseteq \Omega$, $A \in F$ (וולחליפין)

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases} \qquad \omega \in \Omega$$

כמעט מיידי, נובע כי:

$$1_{A^c} = 1 - 1_A$$

עבור $A, B \subseteq \Omega$:

$$1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$$

$$\forall \omega: \quad 1_{A\cap B}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \cap B \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \iff \begin{cases} 1_A(\omega)=1 \wedge 1_B(\omega)=1 \\ 1_A(\omega)=0 \vee 1_B(\omega)=0 \end{cases}$$

הסבר:

$$\iff 1_A \cdot 1_B = 1$$

$$1_A \cdot 1_B = 0$$

נניח כי $\Omega = \mathbb{R}$, אזי לכל $s,t \in \mathbb{R}$:

$$1_{(-\infty,t)}(s) = 1_{(s,\infty)}(t)$$

שני הצדדים של המשוואה הם 1 אמ"מ $s<t$ ו-0 אחרת.

באופן דומה עבור קטע חצי פתוח $1_{(-\infty,t]}(s) = 1_{[s,\infty)}(t)$

תזכורת:

חוקי דה-מורגן:

תהי $I \neq \emptyset$ קב' אינדקסים, יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אזי,

א. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

ב. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} (A_i^c)$

2/1

תרגיל: יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קב', ויהי B קב'. הראו:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$$

פתרון:

א. יהי $w\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B$, אזי $w\in B$ וגם $w\in\bigcup_{i\in J}A_i$ ובפרט, קיים i כך ש: $w\in A_i$, לכן $w\in A_i\cap B$, לכן $w\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$ כיוון שני קל.

ב. $B\setminus\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcup_{i=I}(B\setminus A_i)$

תזכורת:
$B\setminus A=B\cap A^c$

פתרון:

$$B\setminus\bigcap_{i\in I}A_i \underset{\text{הגדרה}}{=} B\cap\left(\bigcap_{i\in J}A_i\right)^c \underset{\text{דה מורגן}}{=} B\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i^c\right) \underset{\text{תרגיל קודם}}{=} \bigcup_{i\in I}(A_i^c\cap B)= \bigcup_{i\in J}(B\setminus A_i)$$

■

תרגיל:

תהי $f:X\to Y$, $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תתי קבוצות ב-Y, רוצים להראות:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i)$$

תזכורת:
$F^{-1}(A)=\{w\in X.\ f(w)\in A\}$
f לא בהכרח הפיכה, אבל יש מוגדרת

פתרון: נבחר $w\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$ אזי

$f(w)\in\bigcup_{i\in I}A_i$

לכן, קיים $i\in I$ כך ש: $f(w)\in A_i$, לכן $w\in f^{-1}(A_i)$ ולכן $w\in\bigcup_{i\in J}f(A_i)$

כיוון הפוך דומה.

■

תרגיל: יהי Ω, F σ אלגברה, P מידת הסת', (Ω,F,P)

תהי: $A_1,A_2,\ldots\in F$ סדרת מאורעות.

נראה:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$$

מספיקים להראות כי P רציפה.

3/1 $A_1, \quad A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3, \dots$

$\quad\quad B_1 \quad\quad B_2$

נבנה סדרת מאורעות חדשה:

$B_1 = A_1$

$B_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

(מסתכלים על האיברים שנוספו)

$B_n \uplus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

זרות

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ לכל n, B_i - קב' זרות, בזוגות

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \underset{\text{הגדרת } B_i}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \left[P\left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j\right) - P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[P\left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j\right) - P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right] \underset{\text{טור טלסקופי}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

גבול טור = גבול סדרה

סכומים חלקיים