חלק IV - מ"מ רב מימדיים

הגדרה - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
פונקציה $(X,Y):\Omega \to \mathbb{R}^2$ היא מ"מ דו מימדי אמ"מ
לכל קבוצה בורלית ב-$\mathbb{R}^2$ $B\in\mathcal{B}_2$ מתקיים $(X,Y)^{-1}[B]\in\mathcal{F}$
כלומר, $\{X\le t_1\}\cap\{Y\le t_2\}\in\mathcal{F}$ לכל $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$

הפונקציה $F:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ היא פהמ"מ אם

$$F_{X,Y}(t_1,t_2)=\mathbb{P}(X\le t_1, Y\le t_2) \quad \forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$$

טענה - מ"מ דו מימדי מגדיר מרחב הסתברות $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_2,\mathbb{P}_{X,Y})$ כאשר:

$$\mathbb{P}_{X,Y}(B)=\mathbb{P}((X,Y)\in B)=\mathbb{P}((X,Y)^{-1}(B)) \quad \forall B\in\mathcal{B}_2$$

יתרה מזו, לכל זוג מ"מ דו-מימדיים (U,V), (X,Y),
$F_{X,Y}=F_{U,V} \longleftrightarrow \mathbb{P}_{X,Y}=\mathbb{P}_{U,V}$

תכונות פהמ"מ דו-מימדי:

-
$$F_{X,Y}(-\infty,l)=\lim_{k\to-\infty}F_{X,Y}(k,l)=0 \quad \forall l.$$
$$F_{X,Y}(k,-\infty)=\lim_{l\to-\infty}F_{X,Y}(k,l)=0 \quad \forall k.$$
$$F_{X,Y}(\infty,\infty)=\lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}F_{X,Y}(k,l)=1$$

- מונוטוניות - $k_1<k_2$ וגם $l_1<l_2$ $\longleftarrow$ $F_{X,Y}(k_1,l_1)\le F_{X,Y}(k_2,l_2)$

- רציפות מימין בשני הרכיבים:
$$\lim_{0<h\to0}F_{X,Y}(k+h,l)=\lim_{0<h\to0}F_{X,Y}(k,l+h)=F_{X,Y}(k,l)$$

הגדרה - כל מ"מ דו-מימדי (X,Y) מגדיר מ"מ שוליים X ו-Y:
$$F_X(t_1)=\mathbb{P}(X\le t_1)=\mathbb{P}(X\le t_1, -\infty<Y<\infty)=F_{X,Y}(t_1,\infty)=\lim_{t_2\to\infty}F(t_1,t_2)$$
וכנ"ל על $F_Y(t_2)$.

יתרה מזו, ניתן להגדיר מ"מ חד מימדיים נוספים ע"י כל טרנספורמציה מדידה בורל, ובפרט ע"י כל טרנספורמציה רציפה, לדוגמה: XY, $X+Y$, וכו'.

הגדרה - נקודה $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ תיקרא אטום אם:
$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X\le x,Y\le y)-\mathbb{P}(X<x,Y<y)=F_{X,Y}(x,y)-\lim_{\substack{x'\to x^-\\ y'\to y^-}}F_{X,Y}(x',y')>0$$
קבוצת האטומים של מ"מ מכיל לכל היותר מספר בן מניה של נקודות.

מ"מ נקרא בדיד אם קבוצת האטומים שלו $A_{X,Y}$ מקיימת $\mathbb{P}((X,Y)\in A_{X,Y})=1$
במקרה זה, ניתן להציג את התפלגותו ע"י:
$$\mathbb{P}(x,y)=\mathbb{P}(X=x,Y=y) \quad \forall(x,y)\in A_{X,Y}$$

הגדרה - מ"מ יקרא רציף אם קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין, הנקראת צפיפות משותפת, כך שמתקיים לכל $t_1<t_2$, $s_1<s_2$:
$$\mathbb{P}(s_1<X<s_2, t_1<Y<t_2)=\iint_{(s_1,s_2)\times(t_1,t_2)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{t_1}^{t_2}\int_{s_1}^{s_2}f(x,y)\,dx\,dy$$

טענה - אם (X,Y) מ"מ רציף עם $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אי שלילית ורציפה כמעט תמיד, מתקיים לכל $(s_2,t_2)\in\mathbb{R}^2$ כי:

$$F_{X,Y}(s_2,t_2) = \lim_{s_1,t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{t_2}\int_{s_1}^{s_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{s_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

הערה - מותר לשנות את סדר האינטגרציה

טענה - בכל נקודת רציפות $(x,y)\in\mathbb{R}$ של f מתקיים:

$$\frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial y\partial x}(x,y) = f(x,y)$$

הגדרה - פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד תיקרא פונ' צפיפות אם לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים כי $f(x,y)\ge 0$ וכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

עבור פונקציה כזו נגדיר את הפה"מ המתאים:

$$F_{X,Y}(t_1,t_2) = P(X\le t_1, Y\le t_2) = \int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

נוכל להגדיר גם פה"מ שולי של X:

$$F_X(t_1) = P(X\le t_1, -\infty\le t_2\le\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx$$

וכמו כן פונ' צפיפות שולית של X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad . \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

טרנספורמציה של מ"מ דו מימדי:

הגדרה - פונקציה $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נקראת פונקציית בורל אם לכל קבוצת בורל $B\in\mathcal{B}$ (על $\mathbb{R}$) מתקיים כי $\varphi^{-1}(B)\in\mathcal{B}_2$

טענה - יהי (X,Y) מ"מ דו מימדי. תהי $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונ' בורל. אזי $\varphi(X,Y)$ הנו מ"מ.

דוגמה:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,z-x)\,dx$$

טענה - יהי (X,Y) מ"מ דו מימדי רציף עם צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ תהי $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציית בורל רציפה למקוטעין. אזי:

$$E[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

דוגמאות:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

הסתברות מותנית ואי תלות בין מאורעות

הגדרה - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. נתון כי מאורע B קרה. עבור $\mathbb{P}(B)>0$, נגדיר

$$\forall A\in\mathcal{F},\quad \mathbb{P}_B(A)=\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$\mathbb{P}_B$ נקראת הסתברות מותנה.

נגדיר $\mathcal{F}_B=\{A\cap B|A\in\mathcal{F}\}$. אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_B)$, $(B,\mathcal{F}_B,\mathbb{P}_B)$ מרחבי הסתברות.

תכונות - אם $\mathbb{P}(B)>0$ אז $\forall A\in\mathcal{F}$:
$$\mathbb{P}_B(A)=\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

- נוסחאת ההסתברות השלמה: יהי $B_1,\dots,B_n$ חלוקה של Ω למאורעות בעלי הסתברות חיוביות. יהי A מאורע.

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

- נוסחאת בייס: תחת אותם סימונים -

$$\mathbb{P}(B_k|A)=\frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

הגדרה - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה. A,B מאורעות. אז A,B בלתי תלוים אם מתקיים אחד מהבאים:
- $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$ $\quad(\mathbb{P}(B)>0)$
- $\mathbb{P}(B|A)=\mathbb{P}(B)$ $\quad(\mathbb{P}(A)>0)$

למה - אם $\mathbb{P}(B)\in\{0,1\}$ אז לכל מאורע A, A,B ב"ת.

הגדרה - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה. יהיו $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ מאורעות. נאמר שהם בלתי תלוים אם לכל $I\in\{1..n\}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I}E_k\right)=\prod_{k\in I}\mathbb{P}(E_k)$$

למה - יהיו $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ ב"ת. לכל k, נסמן χ_{E_k} את האינדיקטור של E_k. אזי לכל אוסף מאורעות $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ כך ש- $B_k\in\sigma(\chi_{E_k})=\{\emptyset,E_k,\bar{E}_k,\Omega\}$ מתקיים:

ה-σ-אלגברה המינימלית בה X מ"מ

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}B_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)$$

* כלומר - אי תלות בין מאורעות גוררת אי תלות בין המשלימים, Ω, ו- $\emptyset$.

מ"מ בלתי תלוים

הגדרה - יהיו $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ מ"מ. נאמר כי הם בלתי תלוים אמ"מ לכל אוסף מאורעות $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ כך ש- $B_k\in\sigma(X_k)$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}B_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)$$

מ"מ בת"ת, נגדיר את סטטיסטי הסדר
הערך ה-k בגודלו באוסף $X_1,\dots,X_n$.

$$F_{X_{(k)}}(t)=\mathbb{P}(X_{(k)}\le t)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}(F(t))^{i}(1-F(t)$$

$$f_{X_{(k)}}(t)=nf(t)(F(t))^{k-1}(1-F(t))^{n-k}$$

בת"ת ואינטגרביליים.

$$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$$

עם תוחלות $\{\mu_k\}_{k=1}^{n}$. נגדיר $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$

$$\mathbb{E}[S_n]=\sum_{k=1}^{n}\mu_k$$

$$V[S_n]=\sum_{k=1}^{n}V(X_k)$$

בת"ת עם פ"מ (פונקציה יוצרת מומנטים) $M_{X_i}(t)$.

$$M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)$$