

תקן III - תוחלת, שונות, ופונקציה יוצרת ממונטים

תוחלת משתנה מקרי בזיך

הבזרה - יהי  $X$  מ"מ בזיך, כמומר  $A_x$ , קבוצת האטומים שלו, מכיל קבוצה בת מנייה של איברים  $c$  כך ש-  $P(X \in A_x) = 1$ . אזי:

$$E[X] = \sum_{\substack{c \in A_x \\ c \geq 0}} c \cdot P(X=c) + \sum_{\substack{c \in A_x \\ c < 0}} c \cdot P(X=c)$$

אם  $X$  הוא סופי, נאמר שהתוחלת אינה מוגדרת אם שני הסכומים סופיים, והתוחלת סופית, נאמר שהיא איננה מוגדרת.

סגנה - יחזות הצבת התוחלת יהי  $X$  מ"מ בזיך אינטגרבי, ונניח:

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$$

נאמר  $A_i, B_i \in \mathcal{F}$  מאורעות,  $\mathbb{1}$  מ"מ האינדיקטור.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i P(B_i)$$

סימון - למסומים נסמן  $X^+ = \max\{X, 0\}$  ו-  $X^- = \min\{X, 0\}$  אזי  $E[X] = E[X^+] + E[X^-]$

תוחלת משתנה מקרי לא בזיך

הבזרה - במסומים הנם, נבזיר תוחלת של מ"מ  $X$  שאינה בזיך.

$$E[X^+] = \sup \{ E[YZ] \mid 0 \leq Y \leq X^+, Y \text{ מ"מ בזיך} \}$$

$$E[X^-] = \sup \{ E[YZ] \mid 0 \leq Y \leq -X^-, Y \text{ מ"מ בזיך} \}$$

$$E[X] = E[X^+] + E[X^-] \quad \text{ואזי}$$

התוחלת קיימת אם לפחות אחד מבין  $E[X^+]$ ,  $E[X^-]$  סופי. אם שניהם סופיים, אז התוחלת סופית ונאמר כי  $X$  אינטגרבי.

סגנה - יהי  $X$  מ"מ כלשהו. אזי:

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt - \int_0^{\infty} F_X(-t) dt$$

מקרה - יהי  $X$  מ"מ כלשהו עם פונקציית צפיפות  $f$ :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt$$

תכונות התוחלת

סגנה - אם  $P(X \geq Y) = 1$  אזי  $E[X] \geq E[Y]$ . במקרה זה נאמר כי  $X$  שולט סטוכסטית ב-  $Y$ .

סגנה -  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, E[\alpha X] = \alpha E[X]$

סגנה -  $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

סגנה - יהי  $X$  מ"מ אינטגרבי, ואינטגרבי, יהי  $Y$  סכס.

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$$



תורת ההסתברות של מ"ה

יהי  $X$  מ"ה אינטגרבי,  $\psi$  פונקציה בידע.  $Y = \psi(X)$

$$E[Y] = E[\psi(X)] = \int_0^\infty (1 - F_{\psi(X)}(t)) dt = \int_{-\infty}^0 (0 - F_{\psi(X)}(t)) dt$$

אם מתקיים גם עבור מ"ה בדיד:

$$E[Y] = E[\psi(X)] = \sum_{c \in C} \psi(c) \cdot P(X=c) + \sum_{c \in C} \psi(c) \cdot P(X=c)$$

ועבור מ"ה רציף:

$$E[Y] = E[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) f_X(t) dt$$

הצגת תוחלת מ"ה דרך מילוטן

אם  $X$  מ"ה  $d^*$  המילוטן המתאים  $\delta$ ,  $X \sim 1 - \delta$  טווח התפלגות ולכן גם טווח תוחלת.

$$E[X] = E[X^*] = \int_0^\infty x^*(t) dt$$

אם  $h$  אינטגרביים:

אם הכולל חסום בקצוות, אסטר לקחת בגודל  $\epsilon$  ולהטא  $\delta - \epsilon$ .

שולח וסטיות תקן

הפציה - יהי  $X$  מ"ה. מדרג הפיזור

$$V(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

הטעות של  $X$  היא -  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

סטיות התקן של  $X$  היא -

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \quad \text{סטנה -}$$

סטנה - אי שוויון צ'ביטב

יהי  $X$  מ"ה אינטגרבי וכל שולח

אזי לכל  $a > 0$  מתקיים

$$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

פונקציה יוצרת מומנטים

הפציה - יהי  $X$  מ"ה. הפונקציה  $M_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת  $M_X(t) = E[e^{tX}]$  נקראת פונקציה יוצרת מומנטים.

היא מוגדרת אם קיימת סביבה קטנה סביב  $0$  בה התוחלת הנגזרת סופית.

הנגזרת ה- $n$  של הפונקציה ב- $0$ :  $M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$

היא הממנט ה- $n$  של  $X$ .

\* אסטר - פיתוח הממנט כדי להשגות כזו להגזיר תוחלת ולגזור כזו להמציא מולח.

סטנה - אם  $M_X(t)$  קיים וטופי בסביבת  $0$   $(-s, s)$  אזי  $E[X^n]$  סיים לכל  $n$  וכן

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n E[X^n]}{n!}$$