חלק II - משתנים מקריים חד מימדיים

משתנה מקרי - פונקציה מדידה

הגדרה I - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
פונ' $X:\Omega \to \mathbb{R}$ היא **פונקציה מדידה** או **משתנה מקרי**
אם לכל קבוצה בורלית $B \in \mathcal{B}$ על $\mathbb{R}$ מתקיים $X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$.

הגדרה II - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
פונ' $X:\Omega \to \mathbb{R}$ היא **פונקציה מדידה** או **משתנה מקרי**
אם לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $X^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{F}$.

טענה - יהיה $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד. תהא $X:\Omega \to \mathbb{R}$ פונקציה.
אזי $\mathcal{F}' = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$ היא σ-אלגברה על $\mathbb{R}$.

מסקנה - הגדרה I ו II שקולות.

הגדרה - יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
ה-**σ-אלגברה הנוצרת ע"י X** היא המינימלית המוגדרת על Ω בה X מדיד.
נסמן $\sigma(X)$

הערה - נסמן $T = \{X^{-1}((-\infty, t]) \mid t \in \mathbb{R}\}$. אזי $\sigma(X) = \sigma(T)$

טענה - אם 2 תוצאות מקבלות אותו ערך ע"י מ"מ. אזי לא ניתן "להבחין" ביניהם
ב-σ-אלגברה הנוצרת.
כלומר, יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
אזי $\forall(\omega, \omega' \in \Omega).\ X(\omega) = X(\omega') \Rightarrow \forall A \in \sigma(X).\ \omega \in A \leftrightarrow \omega' \in A$

טענה - יהיו X, Y מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי:
א- cX מ"מ לכל $c \in \mathbb{R}$
ב- $X+Y$ מ"מ
ג- XY מ"מ
ד- לכל $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה בורל (על $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$) גם $f \circ X$ מ"מ.

מסקנה - הרכבת מ"מ עם פונקציה רציפה, גם היא מ"מ.

פונקציית התפלגות מצטברת

הגדרה - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, ו- $X:\Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ.
פונ' $F_X:\mathbb{R} \to [0,1]$ היא **פונקציית התפלגות מצטברת**
אם מתקיים $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

טענה - תכונות פונ' התפלגות מצטברת:
א- $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$
ב- $F_X(t)$ מונוטונית לא יורדת
ג- הפונקציה רציפה מימין: $\lim_{t \to t_0^+} F_X(t) = F_X(t_0)$

הגדרה - יהיו X, Y מ"מ (לאו דווקא על אותו מרחב הסתברות)
X, Y הם **מ"מ שווי התפלגות** אם $F_X = F_Y$.

הגדרה - יהי X מ"מ. נגדיר פונ' הסתברות על $\mathcal{B}$ של $\mathbb{R}$: $\mathbb{P}_X:\mathcal{B} \to \mathbb{R}$

$$\forall B \in \mathcal{B}.\ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

טענה - $F_X = F_Y \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

הגדרה - יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. נקודה $t\in\mathbb{R}$ תקרא **אטום** אם $F_X(t^-) = \lim_{t'\to t^-} F_X(t') < F_X(t)$

(כלומר, אם ב-t יש נקודת אי רציפות I - מדרגה)

הגדרה - **התומך** של מ"מ X הוא הקבוצה הסגורה המינימלית $S\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{P}(X\in S)=1$

כלומר:

$$S = S(X) = \{t\in\mathbb{R} \mid \forall \varepsilon>0.\ \mathbb{P}(t-\varepsilon<X<t+\varepsilon)>0\}$$

סוגי משתנים מקריים ופונקציות צפיפות

הגדרה - **משתנה מקרי בדיד** הוא מ"מ המקבל מספר בן-מניה של תוצאות. פונקציית ההסתברות המצטברת שלו הנה פונקציית מדרגות.

פורמלית: תהא A_x קבוצת האטומים של מ"מ X.

X הוא בדיד $\longleftrightarrow$ $P(X\in A_x)=1$

* A_x בן מנייה $\longleftarrow$ X בדיד, אך לא הפוך.

הגדרה - מ"מ X יקרא **מ"מ רציף** אם קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין כך שלכל $-\infty<a<b<\infty$ מתקיים:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

f תקרא **פונקציית הצפיפות** של X.

* המשמעות היא ש- $P(X\in(t,t+dx))\approx f(t)$

טענה - יהי X מ"מ רציף. כלומר קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ואי שלילית כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי:

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,dt$$

פונקציית ההסתברות המצטברת

אזי לכל נק' רציפות $x\in\mathbb{R}$ של f מתקיים:

$$F'(x)=f(x)$$

הערות - מההגדרה נובע:

- $P(X=t)=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$
- $f\geq 0$
- $F_X(t)=\int_{-\infty}^t f(x)\,dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

הגדרה - פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין נקראת **פונקציית צפיפות** אם $f\geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

* מהגדרה זו, נגדיר שבה $F(t)=\int_{-\infty}^t f(x)\,dx$, ונקבל ש- $F(t)$ היא אכן פונקציית הסתברות מצטברת!

האחוזון

הגדרה - יהא X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
X^* אחוזון אם:
$$\forall s \in (0,1). \quad X^*(s) = \sup\{t \mid F_X(t) \le s\}$$

נשתמש באחוזון כדי להגדיר מ"מ על $((0,1), \mathcal{B}, \lambda)$
באופן הבא:
$$\forall s \in \mathbb{R}. \quad s \longmapsto X^*(s)$$

טענה - יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי $F_X = F_{X^*}$

התפלגויות ידועות

התפלגות גיאומטרית

במבוא להסתברות, $X \sim Geo(p)$ הוא מ"מ המונה את מספר הנסיונות הב"ת עד ההצלחה הראשונה, ומקיים $\mathbb{P}(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$.
הפה"מ תהיה פונקצית מדרגות.

נגדיר התפלגות גיאומטרית על מ"ה רציף:
יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ כך ש- $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$,
ולכל $(a,b) \subseteq (0,1)$, $\mathbb{P}(a,b) = b-a$.
נגדיר מ"מ גיאומטרי כך:
$$X = \begin{cases} 1 & t \in (0, p] \\ 2 & t \in (p, p+(1-p)\cdot p] \\ 3 & t \in (p+(1-p)\cdot p, \; p+(1-p)\cdot p + (1-p)^2 \cdot p] \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

התפלגות בינומית

כמו במבוא להסתברות $X \sim Bin(n,p)$ הוא מספר ההצלחות מתוך n נסיונות ב"ת שמצליחים בהתפלגות p.

באופן פורמלי:
יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ כך ש- $\Omega = (1,2 \ldots n)$, $n \in \mathbb{N}$, ו- $\mathcal{F} = P(\Omega)$.
לכל $m \in \Omega$, מתקיים:
$$\mathbb{P}(\{m\}) = \binom{n}{m} (1-p)^{n-m} \cdot p^m \qquad (p \in [0,1])$$

המ"מ הבינומי כאן יהיה $X(m) = m$.

התפלגות פואסונית

כמו במבוא להסתברות, $X \sim Poi(\lambda)$ הוא מ"מ המונה את מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון כאשר קצב האירועים הוא λ.
במקרה זה, עבור $(\Omega, \mathcal{F})$ כמו קודם, נקבל:
$$\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

תהליך פואסוני הוא תהליך אקראי $N(t)$ הסופר את מספר האירועים שקרו עד זמן t לכל $t \ge 0$, כאשר:

א. $N(0) = 0$

ב. לכל $(t, t+s]$, $N(t+s) - N(t) \sim P(\lambda s)$, λ ממוצע האירועים ליחידת זמן.

ג. מספר המופעים בקטעי זמן זרים הם ב"ת.

* פה"מ של $X \sim Poi(\lambda)$ היא מדרגות

התפלגות אחידה

$X \sim Uni(a,b)$ מתאר בחירה אקראית על הקטע (a,b).

יהי: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ כך ש- $\Omega=(a,b)$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}((a,b))$

ולכל $(s,t)\subseteq(a,b)$:

$$\mathbb{P}((s,t)) = \frac{t-s}{b-a}$$

המ"מ האחיד יוגדר $X(m)=m$ עבור $m\in(a,b)$.

$$F(t)=\begin{cases} 0 & t\le a \\ \frac{t-a}{b-a} & t\in(a,b) \\ 1 & t\ge b \end{cases} \qquad f(t)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & t\in(a,b) \\ 0 & t\notin(a,b) \end{cases}$$

התפלגות מעריכית

$X\sim exp(\lambda)$ הוא מ"מ המתאר כמה זמן נמשך תהליך שנמשך בממוצע λ.

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

טענה - $X\sim exp(\lambda)$ חסר זיכרון : $P(X>a+b|X>a)=P(X>b)$

זהו המ"מ היחיד המקיים זאת.

טענה - הזמן בין מופעים בתהליך פואסון עם קצב λ מתפלג מעריכית עם פרמטר λ.

טרנספורמציות של התפלגויות

יהי X מ"מ על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ עם פונ' צפיפות f_x רציפה למקוטעין.

תהי φ פונ' מונוטונית עולה מ- $-\infty$ עד ∞ וגזירה:

$$f_{\varphi\circ x}(t)=\left(\frac{f_x}{\varphi'}\circ\varphi^{-1}\right)(t) \qquad F_{\varphi\circ x}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f_x(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}\,dy$$

אם φ יורדת, נכפיל את התוצאות הנ"ל ב- -1.

אם φ בורל חח"ע, ו- φ^{-1} גזירה ברציפות, אז:

$$f_{\varphi\circ x}(t)=f_x(\varphi^{-1}(t))\cdot\left|\frac{d\,\varphi^{-1}(t)}{dt}\right|$$