סיכום הגדרות טענות ומשפטים - הסתברות למדעים   סתיו 2017
© ארצים

חלק I - מרחבי הסתברות

אלגברות ו-σ-אלגברות

תהא Ω קבוצה. נסמן ב-2^Ω את קבוצת החזקה של Ω.

הגדרה - אוסף של תתי קבוצות $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$ תקרא **אלגברה** אם מתקיים:
1 - $\Omega\in\mathcal{F}$
2 - סגירות למשלים - $\forall E\in\mathcal{F}.\ \bar{E}\in\mathcal{F}$
3 - סגירות לאיחוד סופי - $\forall\{E_k\}_{k=1}^{n}\subseteq\mathcal{F}.\ \bigcup_{k=1}^{n}E_k\in\mathcal{F}$

אוסף של תתי קבוצות $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$ תקרא **σ-אלגברה** אם מתקיים:
1 ו- 2 כנ"ל.
3 - סגירות לאיחוד בן-מניה - $\forall\{E_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{F}.\ \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathcal{F}$

למה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה או σ-אלגברה. אזי $\emptyset\in\mathcal{F}$

למה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה, ויהי $\{E_k\}_{k=1}^{n}\in\mathcal{F}$ אוסף סופי של קבוצות.
אזי $\bigcap_{k=1}^{n}E_k\in\mathcal{F}$ (סגירות לחיתוך סופי)
באותו אופן, אם $\mathcal{F}$ σ-אלגברה, היא סגורה לחיתוך אינסופי של קבוצות.

למה - כל σ-אלגברה היא אלגברה.
לא כל אלגברה היא σ-אלגברה.

מרחבי מידה והסתברות

הגדרה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה.
פונקציה $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ מהווה **מידה** אם לכל אוסף סופי של קבוצות זרות בזוגות $\{E_k\}_{k=1}^{n}\subseteq\mathcal{F}$ מתקיים:
$\mu(\bigcup_{k=1}^{n}E_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$ (אדיטיביות)

תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה.
פונקציה μ כנ"ל מהווה **מידה** אם לכל אוסף אינסופי של קבוצות זרות בזוגות מתקיים התנאי הנ"ל. (σ-אדיטיביות)

למה - תהי $\mathcal{F}$ אלגברה או σ-אלגברה, ו- μ מידה עליה.
אזי אם קיימת $E\in\mathcal{F}$ כך ש- $\mu(E)<\infty$, אזי $\mu(\emptyset)=0$

למה - תהיינה $E_1,E_2\in\mathcal{F}$ קבוצות, כך ש- $E_1\subseteq E_2$. אזי $\mu(E_1)\le\mu(E_2)$.

הגדרה - השלשה $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ נקרא **מרחב מידה**.
הזוג $(\Omega,\mathcal{F})$ נקרא **מרחב מדיד**.

הגדרה - תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה.
מידה $P:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ של מרחב מדיד $(\Omega,\mathcal{F})$ מהווה **מידת הסתברות** אם $P(\Omega)=1$.
במקרה זה $(\Omega,\mathcal{F},P)$ יקרא **מרחב הסתברות**.
Ω תהיה **מרחב תוצאות**.
$\mathcal{F}$ תהיה **מרחב מאורעות**.
כל קבוצה $E\in\mathcal{F}$ תקרא **מאורע**.

σ-אלגברה בורלית

הגדרה - ה-σ-אלגברה הקטנה ביותר המכילה את כל הקבוצות הפתוחות נקראת ה-σ-**אלגברה הבורלית** ומסומנת $\mathcal{B}$

טענה - $\mathcal{B} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ כאשר $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ אוסף כל ה-σ-אלגברות המכילות את כל הקבוצות הפתוחות היא σ-אלגברה, ומקיימת את התכונות הנדרשות.

הגדרה - נגדיר מידה על $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, כאשר $\mathcal{B}$ אוסף בורל על $\mathbb{R}$.
מידה זו נקראת **מידת לבג** ומסומנת λ.

עבור קטע פתוח (a,b) $\quad \lambda((a,b)) = b-a$

עבור $B\in\mathcal{B}$ אחר $\quad \lambda(B) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j-a_j) \mid B\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)\}$

הערה - על $\mathcal{B}$ של הקטע $[0,1]$, מידת לבג מהווה מידת הסתברות.
כאשר נרצה להשתמש בה על קטע באורך אחר, נחלק את מידת לבג במידת הקטע.

תרגיל - מידת לבג היא אכן מידת הסתברות (הגדרה מפורטת בסיכומים).

σ-אלגברה נוצרת

הגדרה - תהיינה $\{S_\alpha\} \subseteq 2^\Omega$ אוסף קבוצות.
ה-σ-אלגברה המינימלית המכילה את $\{S_\alpha\}$ היא **ה-σ-אלגברה הנוצרת**,
והיא מתקבלת בין היתר ע"י חיתוך כל ה-σ-אלגבראות המכילות את $\{S_\alpha\}$.
σ-אלגברה זו מסומנת $\sigma(\{S_\alpha\})$.
$\{S_\alpha\}$ נקראת **הצילינדר** של ה-σ-אלגברה הנוצרת.

בנייה - באינדוקציה טרנס-פיניטית.
תהי $\mathcal{T}\in 2^\Omega$.
בסיס - $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T}\cup\{\emptyset,\Omega\}$

לכל סדר עוקב - $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \{\bar{A} \mid A\in\mathcal{F}_\alpha\} \cup \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n\in\mathcal{F}_\alpha\}$

לכל סודר גבול - $\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$

טענה - $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$, ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן-מנייה.

טענה - אם לא ניתן "להבחין" בין 2 תוצאות באוסף T, אז גם לא ניתן "להבחין" ביניהם ב-$\sigma(T)$.

פורמלית: תהי Ω קבוצה, T אוסף מאורעות.
אזי אם $\omega,\omega'\in\Omega$ מקיימות $\forall A\in T.\ \omega\in A \leftrightarrow \omega'\in A$
אזי גם $\forall A\in\sigma(T).\ \omega\in A \leftrightarrow \omega'\in A$