# CLASS EXERCISE 1

1. A sequence of sets $\{A_n\}$ is said to be increasing to the set A ($A_n \uparrow A$) if
   $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$, and $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
   A sequence of sets $\{A_n\}$ is said to be decreasing to the set A ($A_n \downarrow A$) if
   $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$, and $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

   (a) Let $P$ be a probability measure on a $\sigma$-algebra $F$. Show that $P$ is continuous: if $A_n \uparrow A$, then $P(A_n) \to P(A)$. Conclude for $A_n \downarrow A$.

   (b) Let P be a probability measure on a $\sigma$-algebra F, which is **additive, but not necessarily $\sigma$-additive** (That is, $P(\uplus A_n) = \sum P(A_n)$ only for a finite number of disjoint sets $A_n$). In addition, Assume that if $A_n$ is a decreasing sequence of sets such that $A_n \downarrow \emptyset$, then $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Prove that P is a **$\sigma$-additive** probability measure.

2. Let $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ be a probability space and $A_1, A_2, ... \in \mathbb{F}$ an arbitrary sequence of events. Prove the following:

   (a) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (finite number of sets)

   (b) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (countable number of sets)

3. Let $x = (0.x1\ x2\ x3\ ...)_{10}$ be the decimal representation of $x \in [0, 1)$.
   show that the set
   A $= \{x \in [0, 1)$ : 7 appears infinitely many times in the decimal representation of x$\}$
   is a Borel set.

4. Let $\Omega = R$ and define F $= \{A \subseteq R$ : A or $A^c$ is countable $\}$

   (a) Is F a $\sigma$-algebra?

   (b) Define a function P on F as follows:
   For each $A \in F$, $P(A) = 0$ if A is countable, $P(A) = 1$ if $A^c$ is countable.
   Is P a probability measure?

5. Let $F_i$ be an increasing sequence ($F_1 \subseteq F_2 \subseteq ...$) of $\sigma$-algebras and define $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$.

   (a) Is F an algebra?

   (b) Is F a $\sigma$-algebra?

# הסתברות - תרגול

6.11.08

www.math.tau.ac.il/~eronshir

eronshir@post..

יש בוחן - חובת הגשה $\frac{2}{3}$ , יוצא (הגשה) 8 תרגילים

---

מ"ה $(\Omega, F, P)$

$\Omega$ – מרחב מדגם, $F$ – שדה מאורעות, $P$ – מידת הסתברות.

שדה המאורעות הוא $\sigma$-אלגברה:

(1) $\emptyset \in F$

(2) $A \in F \Rightarrow A^c \in F$

(3) $A_1, A_2, \ldots \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

$P$ מידת הסתברות:

(1) $P: F \to [0,1]$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $\sigma$ - אדיטיביות: $A_1, A_2, \ldots \in F$ זרים בזוגות, אזי $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

---

X

(1) מ"ה $(\Omega, F, P)$.

נוכיח רציפות (א)

כלומר: אם $A_n \nearrow A$ , $A_1, A_2, \ldots \in F$

אזי $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$

$A_n \nearrow A$:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$
$$A_n \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

(זה נקרא [illegible])

$A_n \searrow A$:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$
$$A_n \searrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

<u>הוכחה</u>: נניח $A_n \nearrow A$.

נגדיר

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= A_1, \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ B_n &= A_n \setminus A_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

(1) $B_n$ זרות בזוגות

(2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i$

$\left(A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

(3) $A_n = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{(2)}{=} P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) =$$

σ-אדיטיביות

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

(3) אדיטיביות

☒

(ב) נניח ש- $P$ אדיטיבית, אבל לא בהכרח σ-אדיטיבית.

ונניח אם $A_n \downarrow \emptyset$ אז $\lim_{n\to\infty} P(A_n)=0$

נוכיח: $P$ σ-אדיטיבית.

הוכחה: נניח $A_1,A_2,\ldots \in F$ זרים בזוגות.

נראה: $$P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) \underset{\text{אדיטיביות}}{=} P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right)+P\left(\dot{\bigcup_{i=n+1}^{\infty}} A_i\right) =$$

$$\underset{\text{אדיטיביות}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)+P\left(\dot{\bigcup_{n+1}^{\infty}} A_i\right)$$

ניקח גבול

$$P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+\lim_{n\to\infty} P\left(\dot{\bigcup_{n+1}^{\infty}} A_i\right)$$

נסמן $B_n := \dot{\bigcup_{i=n}^{\infty}} A_i \downarrow \bigcap B \overset{!}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty}\dot{\bigcup_{i=n}^{\infty}} A_i \overset{?}{=} \emptyset$

(*)

(ג) יהא $(\Omega, F, P)$

$A_1, A_2, \ldots \in F$

נוכיח:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

באינדוקציה: עבור $n=2$:

$$P(A_1 \cup A_2) = P\left((A_1 \setminus A_2) \,\dot{\cup}\, A_2\right) =$$

$$\overset{\text{אדיטיביות}}{=} P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

$A_1 \setminus A_2 \subseteq A_1$

וכו' הלאה באינדוקציה

(ד)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$\forall n \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(אי שלילי)

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{\text{רציפות}}{=} \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \Longleftarrow$$

$\leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(3) $x = (.x_1 x_2 \ldots\ldots)_{10}$ $x \in [0,1)$ של

$$A = \{x \in [0,1) \mid \text{7 מופיע } \infty \text{ פעמים בפיתוח העשרוני של } x\}$$

קבוצת בורל – שדה בורל – σ-אלגברה המינימלית הנוצרת ע"י הקטעים (הפתוחים)

$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_n = 7\}$$

$$A_1 = [0.7, 0.8)$$

$$A_2 = [0.07, 0.08) \cup \ldots \cup [0.97, 0.98)$$

וכך הלאה – כל $A_n$ היא קבוצת בורל.

$$A = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

$\Leftarrow$ $A$ קב' בורל.

# CLASS EXERCISE 2

1. Let $(0.x_1, x_2, \ldots)_{10}$ be the decimal representation of a number $x \in [0,1)$. Prove that the set $A = \{x \in [0,1) : \exists \lim_{n\to\infty} x_n\}$ is a Borel set.

2. Characterize the random variables on the following $\sigma$-algebras:

   (a) $F = \{\Omega, \emptyset\}$

   (b) $\Omega = R$, $F = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ x \in A \Leftrightarrow -x \in A\}$ (symmetrical sets in $\mathbb{R}$)

3. Let X,Y be random variables. show that X+Y is also a random variable.

4. Let $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ be a probability space, where $\Omega$ is the boundary of the unit square (the square which vertices are $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$), $\mathbb{F}$ the class of all Borel subsets of $\Omega$, and $\mathbb{P}$ the probability measure on $\Omega$ defined according to the Lebesgue measure. What is the probability that the $x$-coordinate of a point would be smaller than some value $x$?

5. Let Q be a square in $\mathbb{R}^2$ with area 1, and let $\Omega$ be the set of all points whose distance from Q (that is, the distance to the closest point in Q) is at most 1. Let $\mathbb{F}$ be the class of all Borel subsets of $\Omega$, and $\mathbb{P}$ the probability measure on $\Omega$ defined according to the Lebesgue measure. Consider the probability space $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. What is the probability that the distance between a point and the square Q is at most $d$?

6. Let $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ is Lebesgue measurable }\}$. Show that $\mathcal{A}$ is a $\sigma$-algebra.

13.11.08

# תרגיל בית (2)

1) הצגה עשרונית של $x\in[0,1)$ $\quad (0.x_1x_2\ldots)_{10}$

להוכיח: $A=\{x\in[0,1) : \exists \lim_{x\to\infty} x_n\}$ היא קבוצת בורל.

הוכחה: נראה ש-A היא בורל.

נגדיר קבוצת בורל $A_{i,d}=\{x\in[0,1) / x_i=x_{i-1}=d\}$ קב' בורל. איחוד סופי של קב' בורל (= נקודות הן קב' בורל)

$$\bigcup_{d=0}^{9}\bigcup_{i=0}^{\infty} A_{i,d}$$

עוד דרך: במקום $A_{i,d}$, להציב $A_{i,d}=\bigcap_{n\ge i}\{x_n=d\}$

הערה: אם A מוכלת בקב' בורל כלשהי, זה לא אומר בהכרח שA קב' בורל!

## משתנים מקריים

$(\Omega,F,P)$ מרחב הסתברות.

X מ"מ על $(\Omega,F,P)$ אם $X:\Omega\to\mathbb{R}$

$$X^{-1}(-\infty,x]=\{\omega\in\Omega / X(\omega)\le x\} \equiv \forall x\in\mathbb{R},\ X^{-1}(-\infty,x]\in F$$

2) נאפיין את המ"מ במקרים הבאים:

(א) $\Omega$ כלשהו, $F=\{\emptyset,\Omega\}$ רק פונ' קבועות יהיו מ"מ במקרה הזה

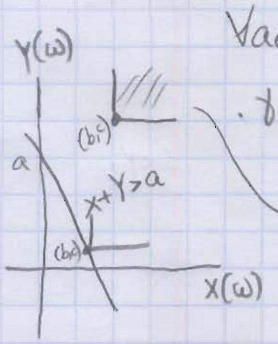
(ב) $\Omega=\mathbb{R}$ $\quad F=\{A\subseteq\mathbb{R} / x\in A\Leftrightarrow -x\in A\}$ רק פונ' זוגיות (סימטריות).

3) אם X, Y מ"מ על מ"ה $(\Omega,F,P)$ ⇐ $X+Y$ מ"מ

הוכחה: נראה: $\{\omega\in\Omega / X(\omega)+Y(\omega)\le a\} \equiv$ מאורע $\{X+Y\le a\}$ $\forall a\in\mathbb{R}$

במקום זה אפשר לבדוק האם המשלים $\{X+Y>a\}$ הוא מאורע.

$$\{X>b\}\cap\{Y>c\}\in F$$




נשים את נק' (b,c) על הישר וניקח איחוד על כל

הנק' הרציונליות (מה בן מניה של כאלה). ונקבל את כל הקרן

$$\{X+Y>a\}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left[\{X>q\}\cap\{Y>a-q\}\right]$$

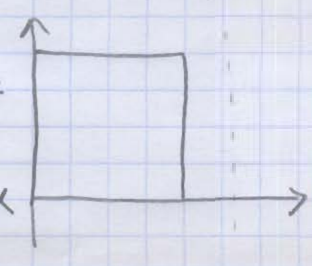
4) נגדיר מ"מ $X((x,y))=x$. מה ההסתברות $P(\{\omega\in\Omega / X(\omega)\le x\})$

$0\le X(x,y)\le 1$

$$P(X\le x)=\begin{cases}1 & x\ge 1\\ 0 & x<0\\ \dfrac{1+2x}{m(\Omega)}=\dfrac{1+2x}{4} & 0\le x<1\end{cases}$$

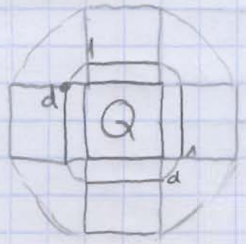
$$\Downarrow \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$$

מידת לבג (במקרה הזה 4)



5) יהא $D$ $D((x,y)) =$ מרחק (x,y) מ-$Q$ . $P(D \le d)$

$0 \le D \le 1$




$$P(D\le d) = \begin{cases} 1 & d \ge 1 \\ 0 & d < 0 \\ \dfrac{4d + \pi d^2 + 1}{5+\pi} & 0 \le d \le 1 \end{cases}$$

(מלבנים — $4d$, רבעי עיגול — $\pi d^2$, ריבוע $Q$ — $1$)

$5+\pi$ ← 5 ריבועים + 4 רבעי מעגל (שטחם 1)

# CLASS EXERCISE 3

1. ($\Omega = [0,1], \mathbb{B}[0,1], \mathbb{P} =$ Lebesgue measure) a probability space.

$$X(w) = \begin{cases} w & 0 \le w \le 1/2 \\ \frac{1}{w} & 1/2 < w \le 1 \end{cases}$$

Find $F_X$, the cdf of X.

2. Let

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 + x & 0 \le x < 1/2 \\ a(x-1)^2 + b & 1/2 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

   (a) Find a,b given that $P(X = 1/2) = 1/4$, and that the set of atoms of X is contained in $(-\infty, 1/2]$.

   (b) Does F have density?

3. Let F be the d.f. of some random variable X, and $\alpha : 0 < \alpha < \infty$.
Define $F_\alpha(x) = (F(x))^\alpha$.

   (a) Is $F_\alpha(x)$ a d.f. (of some r.v. $X_\alpha$)?

   (b) Does $A_\alpha$, the set of atoms of $F_\alpha$, equal $A_1$, the set of atoms of F?

   (c) Is it true that $P(X \in A_1) = P(X_\alpha \in A_\alpha)$?

4. **Remark:**
If $\forall a \in \mathbb{R}$ $F_X(a) = F_Y(a)$ it **does not** necessarily say that $X \equiv Y$. Examples: ($\Omega = [0,1], \mathbb{B}([0,1]), \mathrm{P} =$ Lebesgue measure).

   **(a)**

$$X(w) = w$$

   **(b)**

$$X(w) = \begin{cases} w & 0 \le w < 1/2 \\ \frac{3}{2} - w & 1/2 \le w \le 1 \end{cases}$$

(c)

$$X(w) = \begin{cases} w + \frac{1}{2} & 0 \le w < 1/2 \\ w - \frac{1}{2} & 1/2 \le w \le 1 \end{cases}$$

5. Find the distribution function and density if it exists of the r.v. $Y$, when $Y = X^2, X \sim U(-3, 2)$.

6. Let $X$ be a r.v. with distribution function $F$.

   (a) Show that if $F$ is continuous and strictly increasing then the random variable $Y = F(X)$ (that is $Y(\omega) = F(X(\omega))$) is distributed uniformly on (0,1).

   (b) Is this result still true when $F$ is continuous but not strictly increasing?

   (c) Show that if $F$ is not continuous then the distribution of $Y$ is not uniform.

לא לעשות תרגיל 4

שאלה 5: הנק' נפתרת בצורה אחידה

20.11.08

פונקציית התפלגות מצטברת של המ"מ X :

$F_X:\ \forall x\in\mathbb{R}\quad F_X(x)=P(X\le x)=P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\le x\})$

תכונות:

1. $X_1<X_2$ $\quad F_X(x_1)\le F_X(x_2)$
2. רציפה מימין: אם $x_n\searrow x$ , אזי $\quad F_X(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}F_X(x)$
3. $F_X(x)\xrightarrow{x\to-\infty}0\ ,\quad F_X(x)\xrightarrow{x\to\infty}1$

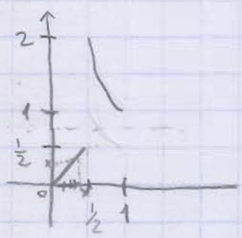
הגדרה

מ"מ X ר' בצפיפות f אם לכל $x\in\mathbb{R}$ $\quad F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$

תכונות

1. $f\ge 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt=1$

**1.** $X(\omega)=\begin{cases}\omega & 0\le\omega\le 1/2\\ \frac{1}{\omega} & 1/2<\omega\le 1\end{cases}$



$0\le X\le 2 \qquad F_X(x)=?\ (X\le x)$

$x\ge 2:\ F_X(x)=1$

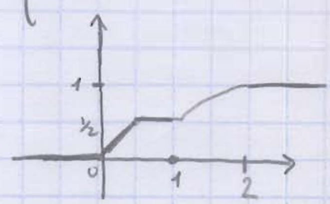
$x<0:\ F_X(x)=0$

$0\le x<\frac12:\ F_X(x)=x$

$\frac12\le x<1:\ F_X(x)=\frac12+0=\frac12$

$1\le x\le 2:\ F_X(x)=\frac12+\left(1-\frac1x\right)=\frac32-\frac1x$

$F_X(x)=\Big\{$



$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\frac12\\ \frac{1}{x^2} & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

כדי לקבל את $f_X(x)$, נגזור את $F_X(x)$

**2.** נתון ① $P(X=1/2)=1/4$
② קב' האטומים מוכלת ב $(-\infty,1/2]$

$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.1+x & 0\le x<\frac12\\ a(x-1)^2+b & \frac12\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

($x\in\mathbb{R}$ הוא אטום של ההתפלגות אם $P(X\le x)-P(X<x)=P(X=x)>0$)

$P(X\le x)=F_X(x)$, $\quad F_X(x)-F_X(x^-)$ — הגבול משמאל

① $\frac14=F_X(\frac12)-F_X(\frac12^-)=\frac a4+b-\underbrace{0.6}_{0.1+0.5}$

② אין אטומים כאן $(1/2,1]$, רציפות, אין קפיצה.

$F_X(1)=F_X(1^-)\Rightarrow b=1$

$1=a(1-1)^2+b$

(b) אין צפיפות, כי יש אטומים.

3. $X \sim F$ , $0<\alpha<\infty$ , $F_\alpha(x) = (F(x))^\alpha$

סעיף (a): לבדוק את שלושת התכונות של פונ' התפלגות מצטברת.

(b) הראה $A_\alpha = A$

קב' האטומים של $F_\alpha$ : $A_\alpha$

" " " $F$ : $F$

נניח $x \in A_\alpha$

$$F_\alpha(x^-) < F_\alpha(x) =$$

$$(F(x^-))^\alpha < (F(x))^\alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} F(x^{-1}) < F(x) \Leftrightarrow x \in A_1$$

(c) הוכח $P(x \in A_1) = P(X_\alpha \in A_\alpha)$ ?

לא נכון. דוגמה סותרת: אטום אחד: $x_0$ , $P(X=x_0) = 1/2$

$$F(X<x_0) = F(x_0^-) = 0$$

# CLASS EXERCISE 4

1. Let $X$ be a r.v. with distribution function $F$.

   (a) Show that if $F$ is continuous and strictly increasing then the random variable $Y = F(X)$ (that is $Y(\omega) = F(X(\omega))$) is distributed uniformly on (0,1).

   (b) Is this result still true when $F$ is continuous but not strictly increasing?

   (c) Show that if $F$ is not continuous then the distribution of $Y$ is not uniform.

2. Find the distribution of $Y$ in the following cases:

   (a) $X \sim exp(\lambda), Y = -\ln X$

   (b) $X \sim U(0,1), Y = -\ln X$

   (c) $X \sim U(-3,2), Y = X^2$

3. For $a > 0$ let
$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
   For which value of $k$ the function $f$ may be a density function?

4. A non-negative continuous random variable is said to be memoryless if -
   $\forall t, s > 0,\ P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s)$.
   Prove a continuous $X \geq 0$ (with $P(X > 0) > 0$) is memoryless iff $X \sim exp(\lambda)$.

5. A man is standing on the point $(1,0)$ in the plane, throwing a ball towards the y axes. The angle between the direction of the ball and the x axes is a random variable $\alpha$ whose distribution is uniform on the interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Let Y be the y-coordinate of the hitting point of the ball on the y axes. Find $F_Y$, the distribution function of $Y$, and its density, if it exists.

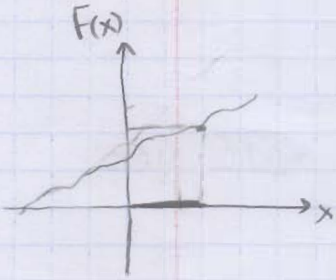
27.11.08

X מ"מ בעל צפיפות $f_X$. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית וגזירה, אזי

$Y=g(X)$ בעל צפיפות $f_Y$ שנתונה ע"י

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{y לא בטווח של g}\\ f_X(g^{-1}(y))\,|(g^{-1}(y))'| & \text{y בטווח של g}\end{cases}$$

1. תר' X מ"מ. בעל פונק' הסתברות מצטברת F. נניח: אזי F רציפה ועולה ממש. המ"מ $F(X)=Y$ מתפלג $U(0,1)$




הוכחה: $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$

$0\le F(x)\le 1$

$\Leftarrow$ $y<0:\quad 0=F_Y(y)$

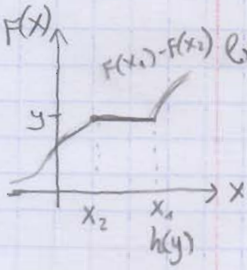
$y\ge 1:\quad 1=F_Y(y)$

עבור $0\le y<1$:

כי F רציפה

$P(F(X)\le y)\overset{?}{=}P(X\in F^{-1}([0,y]))=$

$=P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$



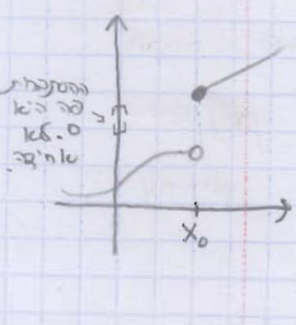

ב. האם התוצאה נשארת נכונה כאשר F רציפה, אך לא בהכרח עולה ממש $F(x_1)-F(x_2)$?

עבור $y<0$, $y\ge 1$ קל לראות שנשאר אותו דבר.

נראה עבור $0\le y<1$: $F_Y(y)=P(F(X)\le y)=$

$=P(X\in F^{-1}([0,y]))=P(X\le h(y))=F(h(y))=y$

$h(y)=\sup(\{t\in\mathbb{R}/F(t)\le y\})$ ; F רציפה




ג. האם התוצאה נשארת נכונה גם אם F לא רציפה?

$P(X\le x_0)=F(x_0)\geq F(x_0^-)=P(X<x_0)$

$\Leftarrow$ קיים אורך קטן $y_1<y_2$, $[y_1,y_2]\subset[F(x_0^-),F(x_0)]$

$P(F(X)\in[y_1,y_2])=0$

2. $X\sim U(0,1)$, $Y=-\ln X$. נמצא צפיפות Y. הראשית נתונה $Y>0$

$g(t)=-\ln t$. גזירה, רציפה, מונוטונית ממש. $g^{-1}(y)=e^{-y}$ (מצאן לפי נוסחה... לא צריך)

(דרך שניה): כאשר $y<0$, אזי $f_Y(y)=0$.

כעת עבור $y\ge 0$: $F_Y(y)=P(-\ln X\le y)=P(\ln X\ge -y)=$

$=P(X\ge e^{-y})\overset{(*)}{=}1-e^{-y}$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ 1-e^{-y} & y\geq 0\end{cases}=exp(1)$$

הגדרה הכללית: נאמר $Y\sim exp(\lambda)$ אם, $(\lambda>0)$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y} & y\geq 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y\geq 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

יכולנו לעבור משלב (*) ולקבל

$$F_Y(y)=1-F_X(e^{-y})$$

נגזור שני הצדדים

$$f_Y(y)=f_X(e^{-y})\cdot(-e^{-y})$$

3. עבור $a>0$ נגדיר
$$f(x)=\begin{cases}kxe^{-ax} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

עבור איזה ערך $k$ (אם בכלל) הנ"ל $f$ פונק' צפיפות?
כי אם $a\leq 0$ אז האינטגרל הוא מתבדר.

$$1=\int_0^\infty kxe^{-ax}dx \overset{\text{חישוב}}{=} k=a^2$$

4. מ"מ אי-שלילי רציף $X$ נקרא חסר זיכרון אם: $P(X>x+y|X>x)=P(X>y)$

טענה: $X$ הוא מ"מ רציף חסר זיכרון המקיים $P(X>0)>0$ אמ"מ $X\sim exp(\lambda)$

הוכחה: $\Leftarrow$ ניקח פו' $F_Y(y)$ מתרגיל 2. ונציב בהגדרה של "חסר-זיכרון". קל לראות.

$\Rightarrow$ נסמן $\bar{F}(t)=1-F(t)$ כאשר $F(t)$ פו' ההתפלגות המצטברת של מ"מ רציף...

מתקיים $\bar{F}(t+s)=\bar{F}(t)\bar{F}(s)$

$$\bar{F}(1)=\bar{F}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})=(\bar{F}(\tfrac{1}{2}))^2=\cdots=(F(\tfrac{1}{n}))^n$$

$$\bar{F}(1/n)=(\bar{F}(1))^{1/n}$$

$$\bar{F}(r)=(\bar{F}(1/n))^m=(\bar{F}(1))^{m/n}=(\bar{F}(1))^r$$

נבחר $r=m/n$

ומרציפות מיין אם זה נכון לכל רציונלי, זה נכון לכלל

$$\bar{F}(y)=(\bar{F}(1))^y$$

$$r_n\to y \quad \lim_{n\to\infty}\bar{F}(r_n)=\bar{F}(y)\Longrightarrow \lim(\bar{F}(1))^{r_n}=(\bar{F}(1))^y$$

נשאר לבדוק ש $\bar{F}(1)\neq 0$ (וזה נובע מרציפות).

# CLASS EXERCISE 5

1. Find the expectation of a random variable with the following distribution function:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x < 1/2 \\ 0.5 & 1/2 \le x < 1 \\ 3/2 - 1/x & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

   Use two different methods.

2. compute $E(Y)$ in the following cases:

   (a) $X \sim exp(\lambda)$, $Y = e^{nX}$.

   (b) $X \sim N(0,1)$, $Y = X^n$.

3. Let $g(a) = E((X-a)^2)$, X some r.v. s.t. $E(X^2) < \infty$.
   Show that the minimum of $g(a)$ is reached at $a = E(X)$.

4. Part of a question from Professor Tsirelson's exam (01/07/02):
   Let $X$ be an integrable r.v. and define

$$U(t) = E|X - t|$$

   Prove that for every $s < t$,

$$2F_X(s) - 1 \le \frac{U(t) - U(s)}{t - s} \le 2F_X(t^-) - 1$$

   hints:
   (*) $2F_X(t^-) - 1 = P(X < t) - P(X \ge t)$, $2F_X(s) - 1 = P(X \le s) - P(X > s)$
   (*) Think of the function $g(x) = \frac{|x-t|-|x-s|}{t-s}$.

5. You always complain that when arriving to a line you have an extreme bad luck, and have to wait for an exceptionally long time. Denote by $X_0$ your waiting time at some line. Denote by $X_1, X_2, \ldots$ the waiting times of other people at the same line, and suppose $X_0, X_1, \ldots$ are independent and identically distributed, with continuous distribution.
   You would like to find a measure for your bad luck, therefore want to know how long it will take before another person waits more than you. How long do you expect it will take? Are you really that unlucky?

4.12.08

# תוחלת

X מ"מ עם $F_x$ cdf : $E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F(t)dt + \int_{0}^{\infty} (1-F(t))dt$

מקיימת:

(1) תלות בהתפלגות בלבד $X \sim Y \Rightarrow E(X)=E(Y)$

(2) מונוטוניות $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

(3) לינאריות $E(aX+b) = aE(X)+b$

אם X בעל צפיפות $f_x$ : $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx$$

1. אלטרנטיבה I: לפי $F_x$:

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F(t)dt + \int_{0}^{1/2} (1-x)dx + \int_{1/2}^{1} \tfrac{1}{2} dx + \int_{1}^{2} 1-(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{x}) dx$$

אלטרנטיבה II: לפי $f_x$:

$$E(X) = \int_{0}^{1/2} x \cdot 1 \, dx + \int_{1}^{2} x \cdot \tfrac{1}{x^2} dx$$

2. (a) $X \sim exp(\lambda)$. מצא $E(e^{nX})$

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}(x<0)$$

$$E(e^{nX}) = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot e^{nx} dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-x(\lambda - n)} dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - n} & \lambda > n \\ \infty & \lambda \leq n \end{cases}$$

(b) $X \sim N(0,1)$ מצא $E(X^n)$. $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{\text{זוגית}} \cdot \underbrace{x^n}_{\substack{\text{n זוגי: זוגית} \\ \text{n אי זוגי: אי זוגית}}} dx$$

$n=2k-1$ : $E(X^n)=0$ (פונק' אי זוגית על כל ה-R)

$n=2k$ :

$$E(X^{2k}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{x \cdot e^{-x^2/2}}_{(-e^{-x^2/2})'} dx$$

אינטגרציה בחלקים:

$$= -x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx =$$

$E(X^{2k}) = (2k-1)E(X^{2k-2}) = (2k-1)(2k-3)E(X^{2k-4}) = \dots = \dots$ : [illegible]

$\dots = (2k-1)(2k-3)\cdot \dots \cdot 1$

**3.** $g(a) = E((X-a)^2)$ $\quad E(X^2) < \infty$

$g(a) = E((X-a)^2) = E\left[\left((X-E(X)) + (E(X)-a)\right)^2\right] =$

$= E\left[(X-E(X))^2\right] + 2\underbrace{E\left[(X-E(X))(E(X)-a)\right]}_{0} + (E(X)-a)^2$

$a = E(X)$ אנו אז $g(a)$ מינימלית.

(המינימום הוא השונות של $X$, $Var(X)$)

**4.** $u(t) = E|X-t|$, הוכח לכל $s<t$ $\quad 2F_X(s)-1 \le \frac{u(t)-u(s)}{t-s} \le 2F_X(t^-)-1$

$P(X\le s)-P(X>s) \le \frac{E|X-t| - E|X-s|}{t-s} = E\left[\frac{|X-t|-|X-s|}{t-s}\right] \le P(X<t)-P(X\ge t)$

$$g(x) = \frac{|x-t|-|x-s|}{t-s} = \begin{cases} -1 & : x\ge t \\ \frac{t+s-2x}{t-s} & : t<x<s \\ 1 & : x\le s \end{cases} \Longrightarrow -1 < \frac{t+s-2x}{t-s} < 1$$

הרעיון:

$$\underline{Z} \le g(X) \le \overline{Z}$$

$$E(\underline{Z}) \le E(g(X)) \le E(\overline{Z})$$

$$\overline{Z} = \begin{cases} X\ge t & : -1 \\ X<t & : 1 \end{cases} \qquad \underline{Z} = \begin{cases} X>s & : -1 \\ X\le s & : 1 \end{cases}$$

נקבל: $\underline{Z} \le g(X) \le \overline{Z}$ לכן $E(\underline{Z}) \le E(g(X)) \le E(\overline{Z})$

$-1\cdot P(X>s) + 1\cdot P(X\le s) \le E(g(X)) \le -1\cdot P(X\ge t) + 1 P(X<t)$

# CLASS EXERCISE 6

1. Prove that if $X$ is a r.v. bounded between $a$ and $b$ (that is $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$) then $Var(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. Is this a tight bound? (Can you find $a \leq X \leq b$ with $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{4}$ ?).

2. $Y \geq 0$ a random variable. Prove:

$$E(Y) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(Y > n) < \infty$$

3. Let $Y \sim exp(1),\ X = \min(Y, 1)$.

   (a) Compute the distribution function of $X$ and its density, if it exists.

   (b) Compute the moments generating function of $X$.

4. You always complain that when arriving to a line you have an extreme bad luck, and have to wait for an exceptionally long time. Denote by $X_0$ your waiting time at some line. Denote by $X_1, X_2, \ldots$ the waiting times of other people at the same line, and suppose $X_0, X_1, \ldots$ are independent and identically distributed, with continuous distribution.

   You would like to find a measure for your bad luck, therefore want to know how long it will take before another person waits more than you. How long do you expect it will take? Are you really that unlucky?

5. The daily requirement for cakes in a bakery is a random variable $D$ with d.f. $F$. The cost of one cake is c, and its price is p $(c < p)$. The baker should decide what is the optimal number of cakes to bake every day, considering that cakes that are not sold during the day should be thrown away at the end of the day.

   Let $C(y)$ be the daily profit if $y$ cakes were baked. So -

$$C(y) = \begin{cases} pD - cy & D < y \\ py - cy & D \geq y \end{cases}$$

   Assume that D is continuous, and express $E(C(y))$ as a function of y. Show that the optimal quantity to bake (gives maximum expected profit) is the solution to the equation $F(y) = 1 - \frac{c}{p}$.

11.12.08

1. $P(a\le X\le b)=1$ . נראה $var(X)\le \frac{(b-a)^2}{4}$

$$\left[\, Var(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=E(X^2)-(E(X))^2 \,\right]$$

* $a=0,\ b=1$ . צ"ל $var(X)\le \frac{1}{4}$

$$var(X)=E(X^2)-(E(X))^2 \underset{x^2\le x \text{ בקטע } [0,1]}{\le} E(X)-(E(X))^2 = E(X)\left[1-E(X)\right]\le \frac{1}{4}$$

$0\le E(X)\le 1$

$$g(t)=t(1-t) \qquad t\in[0,1]$$

מקבלת מקסימום ב $t=\frac{1}{2}$

* $a,b$ כלליים. $0\le Y=\frac{X-a}{b-a}\le 1$

$$\Rightarrow var(Y)=var\left(\frac{X-a}{b-a}\right)\le \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\Big[\, var(mX+n)=E((mX+n)^2)-\left[E(mX+n)\right]^2=m^2E(X^2)+2mnE(X)+n^2$$

$$m^2E(X^2)+2mnE(X)+n^2-m^2(E(X))^2-2mnE(X)-n^2=$$

$$=m^2\left[E(X^2)-(E(X))^2\right]=m^2\,var(X)$$

האם החסם הדוק? כן.

ניקח $X=\begin{cases} a & p=\frac{1}{2}\\ b & p=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftarrow var(X)=\frac{(b-a)^2}{4}$

(עוד פיתרון: מינימום של $g(a)=E\left[(X-a)^2\right]$, ולכן $var(X)=E(X-E(X))^2\le E\left[(X-\frac{a+b}{2})^2\right]$)

2. $Y\ge 0$ , $E(Y)<\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty}P(Y>n)<\infty$

(נשים לב: אם $Y$ היה מקבל ערכים $0,1,2,\dots$ אז $E(Y)=\sum_{n=0}^{\infty}P(Y>n)$)

נגדיר $Z=\lfloor Y\rfloor$ ומתקיים $Z\le Y\le Z+1$ (יכולנו להגדיר גם $X=\lceil Y\rceil$)

$$E(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(Z>n)$$

$$E(Z+1)=1+\sum_{n=0}^{\infty}P(Z>n)$$

ולכן $E(Y)<\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty}P(Z>n)<\infty$

אבל בגלל ש $Z\le Y\le Z+1$ אז $P(Z>n)\le P(Y>n)\le P(Z+1>n)$

ולכן $\sum P(Z>n)<\infty \iff \sum P(Y>n)<\infty$

תרגיל נוסף (במקום 3).

א) יהי $X$ מ"מ. נניח כי לכל $t>0$ מוגדר $M_X(t)$ קיים, צ"ל: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$P(X\ge a)\le \frac{M_X(t)}{e^{ta}}$$

הוכחה:

$$P(X\ge a)=P(Xt\ge at)=P(e^{Xt}\ge e^{at})\le$$

[אי"ש מרקוב: $a\ge 0,\ X\ge 0$ : $P(X\ge a)\le \frac{E(X)}{a}$]

$$\underset{\text{מרקוב}}{\leq} \frac{E(e^{xt})}{e^{at}}$$

(ב) נשתמש בתוצאה א(א) כדי למצוא חסם הדוק ככל שנוכל, להסתברות

$P(S_n \geq na)$, עבור $S_n \sim Bin(n,p)$, $a \in (p,1)$

$$P(S_n \geq na) \leq \frac{M_{S_n}(t)}{e^{tna}}$$

$$\left[ M_{S_n}(t) = E(e^{S_n t}) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) e^{kt} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{kt} = \right.$$

$$\left. = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (e^t p)^k = (1-p+pe^t)^n \right]$$

$$\Longrightarrow P(S_n \geq na) \leq \frac{(1-p+pe^t)^n}{e^{tna}}$$

4. $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ב"ת, שה"ה, רציפים.

N: האינדקס הראשון $n$ כך ש $X_n > X_0$. $E(N) = ?$

$$P(N > n) = P(X_0 \text{ הוא המקס' מבין } X_0, \ldots, X_n) = \frac{1}{n+1}$$

$$E(X) = \sum \frac{1}{n+1} = \infty$$

# CLASS EXERCISE 7

1. A point X is chosen randomly in the interval $(0,1)$. Let $U$ be the length of the shorter interval between $(0,X)$ and $(X,1)$, $V$ the length of the longer. Find $F_{U,V}$.

2. Are the following assertions true:

   נכון (a) If $X$ or $Y$ have no atoms then $(X,Y)$ has no atoms.

   לא נכון (b) If $(X,Y)$ has no atoms then $X$ and $Y$ have no atoms.

איפה שהצפיפות אינה 0, אם מקבל ה"א ערכים

3. $$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(1-x-y) & x>0, y>0, x+y \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

   Is the 2-dimensional density of a random vector $(X,Y)$.

   (a) Find the constant c.

   (b) Find the marginal densities $f_X$ and $f_Y$.

   (c) Find $P(X < Y/2), P(X < Y)$.

   (d) Compute $E(XY), E(X+Y)$.

4. $X, Y$ random variables with joint density $f(x,y) = 1_{(0,1)\times(0,1)}(x,y)$. Let $Z = XY$.

   (a) Compute $E(Z)$.

   (b) Find the density of $Z$.

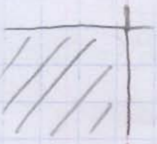
5. Let $f_{X,Y}$ be a 2-dimensional density and assume $f_{X,Y}$ is continuous at the point $(x_0, y_0)$. Prove -

$$f_{X,Y}(x_0,y_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} P(x_0-\varepsilon \le X \le x_0+\varepsilon, y_0-\varepsilon \le Y \le y_0+\epsilon)$$

18.12.08

## התפלגות דו-מימדית, של המ"א (X,Y)

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,\ Y\le y)$$

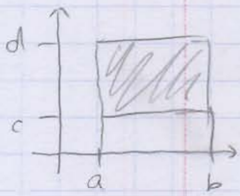


תכונות: (1) $0\le F_{X,Y}(x,y)\le 1$

(2) $\lim_{x\to-\infty}F_{X,Y}(x,y)=\lim_{y\to-\infty}F_{X,Y}(x,y)=0$

(3) $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F_{X,Y}(x,y)=1$

(4) $F_{X,Y}(x,y)=\lim_{\substack{x_n\searrow x\\ y_n\searrow y}}F_{X,Y}(x_n,y_n)$




(5) אם $a\le b$ , $c\le d$ ,

$$F_{X,Y}(b,d)-F_{X,Y}(a,d)-F_{X,Y}(b,c)+F_{X,Y}(a,c)\ge 0$$

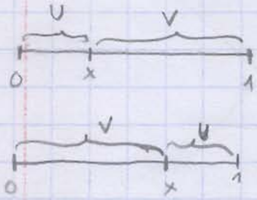
- $\lim_{y\to+\infty}F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)$

- אם (X,Y) רציפות עם $f_{X,Y}$ אם $F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$

ואז $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy$

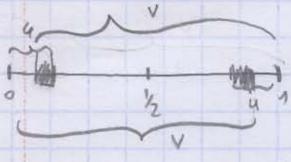
- אם (X,Y) רציפות אז $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

**1.** $X\sim U(0,1)$

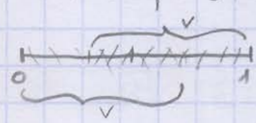


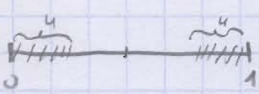

$0<U\le \frac12$ , $\frac12\le V<1$

$$F_{U,V}(u,v)=P(U\le u,\ V\le v)=\begin{cases}0 & u<0 \text{ או } v<\frac12\\ 1 & u\ge\frac12 \text{ וגם } v\ge 1\\ 0 & 0\le u<\frac12 \text{ וגם } \frac12\le v<1 \text{ וגם } u+v<1\\ 2(u+v-1) & 0\le u<\frac12 \text{ וגם } \frac12\le v<1 \text{ וגם } u+v\ge 1\\ 2v-1 & u\ge\frac12,\ \frac12\le v<1\\ 2u & 0\le u<\frac12,\ v\ge 1\end{cases}$$




(סופרים את שני הקטעים המסומנים)




נמצא התפלגויות שוליות:

$$F_U(u)=\lim_{v\to+\infty}F_{U,V}(u,v)=\begin{cases}0 & u<0\\ 2u & 0\le u<\frac12\\ 1 & u\ge\frac12\end{cases}$$

$$F_V(v)=\lim_{u\to+\infty}F_{U,V}(u,v)=\begin{cases}0 & v<\frac12\\ 2v-1 & \frac12\le v<1\\ 1 & v\ge 1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad U\sim U(0,\tfrac12),\qquad V\sim U(\tfrac12,1)$$

2. הגדרה: $(x_0,y_0)$ אטום של $(X,Y)$ אם $P(X=x_0,Y=y_0)>0$

$$P(X=x_0,Y=y_0)\le P(X=x_0),\ P(Y=y_0)$$

לכן א' נכון.

ב' לא נכון. מרחב ההסתברות הסטנדרטי

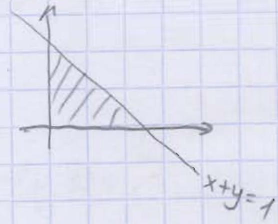
$$X(\omega)=\begin{cases}0 & \omega\in(0,1/2)\\ \omega & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$Y(\omega)=\begin{cases}\omega & \omega\in(0,1/2)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$P(X=0)=1/2=P(Y=0)$ (0 הוא אטום ב-X וב-Y)

אבל: $P(X=0,Y=0)=0$

3. (א)

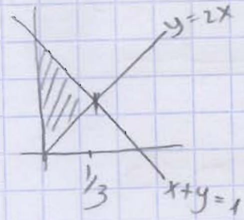



$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$1=\int_0^1\int_0^{1-x} c(1-x-y)\,dy\,dx = \quad =$$

ונקבל $\boxed{c=6}$

(ג)




$$P(X<1/2)=\int_0^{1/3}\int_{2x}^{1-x} 6(1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$=1/3$$

$P(X<Y)=1/2$ סימטרית.

(ב) צפיפות שוליות:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\int_0^{1-x} 6(1-x-y)\,dy$$

$f_Y(y)=$ אותו דבר, רק מחליפים x ב-y.

הערה על שאלה 3, סעיף ג: האם ב. צפיפות?

# CLASS EXERCISE 8

1. Let $X_1, X_2, \ldots$ be i.i.d random variables distributed $U(0,1)$.
   (a) Prove that $P(X_1 < X_2 < X_3 < x) = \frac{x^3}{6}$.
   (b) Are the r.v. $Y = \max(X_1, \ldots, X_{10})$ and the event $A = \{X_1 < X_2 < \ldots < X_{10}\}$ independent?

2. (a) $Y \sim exp(\mu), X \sim exp(\lambda)$ independent r.v's. Find $P(X < Y)$.
   (b) $X_1, \ldots X_n$ independent, $X_i \sim exp(\lambda_i)$, $T = \min_{1 \leq i \leq n}(X_i)$. Find the distribution of $T$.
   (c) For $n = 2$, let I be s.t. $X_I = T$ (the index of the minimum).
   Prove that $T, I$ are independent.

3. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of events, $\{c_n\}$ a sequence of real numbers s.t. $\lim_{n \to \infty} c_n = \infty$. Define $X_n = c_n \mathbb{I}_{A_n}$.
   Find necessary and sufficient conditions for $X_n \to 0$ almost surely and in probability.

4. $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d random variables, $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.
   Does $E|X_1| < 1$ imply that $Y_n \to 0$ a.s?

5. $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d random variables.
   If $E(X_1) < \infty$, what can we say about $P(\frac{X_n}{n} \to 0)$?

6. Prove that if $X_n$ converges to $X$ in probability, then there is a subsequence $X_{n_k}$ that converges to $X$ almost surely.

25.12.08

# א' - תלויות

* X,Y בת"ל אם $P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$ לכל קבוצות A,B
* X,Y בת"ל $\iff F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$
* X,Y בת"ל בעלי צפיפויות $f_Y(y), f_X(x)$ $\iff$ $(X,Y)$ בעלי צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

מספיק לבדוק $f_{X,Y}(x,y)=g(x)h(y)$

* $E(XY)=E(X)E(Y)$

1) a. הוכח $P(X_1<X_2<X_3<x)=\frac{x^3}{6}$ $\quad 0<x<1$

הוכחה: יש סימטריה, ולכן $P(X_1<X_2<X_3<x)=P(X_2<X_1<X_3<x)=\cdots$ } בת"ל

$$x^3=P(X_1<x, X_2<x, X_3<x)=\sum_{\text{כל הפרמוטציות האפשריות}} P(X_i<X_j<X_k<x)=$$

$$=6P(X_1<X_2<X_3<x)\Longrightarrow P(X_1<X_2<X_3<x=\frac{x^3}{6}$$

b. האם A,Y בת"ל? $\iff$ האם $1_A$, Y בת"ל?

$$P(\underbrace{1_A=1}_{A}, Y\le t)=P(X_1<X_2<\cdots<X_{10}\le t)=\frac{t^{10}}{10!}$$

$$\left.\begin{aligned}P(A)&=\frac{1}{10!}\\ P(Y\le t)&=P(X_1\le t,\dots,X_{10}\le t)=t^{10}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{t^{10}}{10!}$$

והם אכן בת"ל.

2. a. $X\sim exp(\lambda)$, $Y\sim exp(\mu)$ בת"ל. מהו $P(X<Y)=?$

(האינטואיציה היא $\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$ (5 אירועים ממוצע א' ביחידת זמן
3 אירועים ממוצע ב' ביחידת זמן
מה הסיכוי שאירוע ממוצע א' יקרה לפני אירוע ממוצע ב' $\left(\frac{5}{8}=\frac{5}{3+5}\right.$

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad f_Y(y)=\mu e^{-\mu y}$$

$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ $\quad x,y>0$ (אחרת 0)

$$P(X<Y)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\int_0^\infty \mu e^{-\mu y}\,dy\,dx=\int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda+\mu)}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

## $\limsup$, $\liminf$ — קבוצות $A_1, A_2, \dots$

$\limsup A_n = \{\omega \mid \omega$ מופיע ב-$\infty$ $A_n\} = \{A_n \text{ infinite often}\} =$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

$\liminf A_n = \{\omega \mid \omega$ מופיע בכל ה-$A_n$, פרט אולי לאוסף סופי$\} = \{A_n \text{ eventually}\} =$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n \qquad *$$

$$(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c \qquad *$$

בורל קנטלי (I): $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(\limsup A_n) = 0$

$X_n \xrightarrow{a.s} X$: $P(X_n \to X) = 1 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.o}) = 0$

יותר חלש: $X_n \xrightarrow{P} X$: $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$

3. נמצא תנאים הכרחיים ומספיקים ל $X_n \xrightarrow{a.s} 0$ ול $X_n \xrightarrow{P} 0$

a.s: $X_n \xrightarrow{a.s} 0 \iff P(c_n 1_{A_n} \to 0) = 1 \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad P(c_n 1_{A_n} - 0 > \varepsilon \text{ i.o}) = 0 \iff$

$P(1_{A_n} > \varepsilon / c_n \text{ i.o}) = \boxed{P(A_n \text{ i.o}) = 0}$

P: $X_n \xrightarrow{P} 0 \iff P(c_n 1_{A_n} > \varepsilon) \longrightarrow 0 \iff$

$P(1_{A_n} > \varepsilon / c_n) = \boxed{P(A_n) \longrightarrow 0}$

1.1.09 zemerkos@post.tau.ac.il 03-6408302

**טענה**

$\liminf A_n = (\limsup A_n^c)^c$

$P(\liminf A_n)=1$ — שימוש: טא להוכית

$P(\limsup A_n^c)=0$ — נראה

**הוכחה** לפי דה-מורגן:

$\bigcup (A_n)^c = \bigcap A_n^c$

$\bigcap (A_n)^c = \bigcup A_n^c$

$(\limsup A_n^c)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)\right)^c =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \liminf A_n$

$A_k \leftarrow (A_k^c)^c$

**למות של בורל קנטלי (BCT)**

1. יהיו $A_1,\dots,A_n,\dots$ מאורעות. אם $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)<\infty$ אז $P(\limsup A_n)=0$
2. בנוסף נניח שהמאורעות ב"ת, $\sum P(A_i)=\infty \Leftarrow P(\limsup A_n)=1$

**תרגיל** $(X_n, Y_n)$ נבחרים בהתפלגות אחידה במעגל $\{X_n^2+Y_n^2\le r_n^2\}$

$\{r_n\}$ סדרה. נסתכל על הקבוצה $A_n=\{n / X_n^2+Y_n^2\le 100\}$

א. מה הסיכוי ש-$A$ סופית בהינתן $r_n=n$

ב. מה הסיכוי ש $r_n=\sqrt{n}$

**פתרון**

$(X_n, Y_n)\sim$ 

א. נסמן $A_n=\{X_n^2+Y_n^2\le 100\}$

$\omega\in\limsup A_n \iff |A(\omega)| = \infty$ $\quad (n / X_n(\omega)^2+Y_n(\omega)\le 100)$

$P(A_n) = \frac{\text{שטח קטן}}{\text{שטח המעגל כולו}} = \frac{\pi(10)^2}{\pi n^2} = \frac{100}{n^2}$ $\quad n\ge 10$

$\sum_{n=10}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=10}^{\infty}\frac{100}{n^2} < \infty$ (משפט ידוע)

מבורל קנטלי נקבל ש $P(\limsup A_n)=0$

כלומר $A$ סופית בהסתברות אחת.

ב.

 $P(A_n)=\frac{100}{n}$

$\sum P(A_n)=\infty$

$A_1,\dots,A_n$ כי $(X_n,Y_n)$ ב"ת

$P(|A|=\aleph_0)=P(\limsup A_n)=1$

נניח שבסעיף ג: נבחר נקודה $(X_n, Y_n)$ מהתפלגות אחידה במעגל היחידה ($r_n \equiv 1$). מה ניתן לומר על $A=\{n \mid \frac{1}{n} \le X_n^2+Y_n^2 \le \frac{1}{\sqrt{n}}\}$

**תרגיל** $X_1, X_2, \dots$ ש"ה ב"ת. (גב"ר) $Y_n = X_1\cdot X_2 \cdots X_n$

אם $E(|X_1|)<1$ מה ניתן לומר על $P(Y_n \to 0)$ $(Y_n \xrightarrow{a.s} 0)$

**פתרון** $P(Y_n\to 0) = P(\forall \varepsilon>0, \exists N\ |Y_n|<\varepsilon \quad \forall n\ge N)$

צריך למצוא $\varepsilon_n \to 0$ ולהראות $\{|X_n|\ge \varepsilon_n\}$ קורה אם סופי של פעמים a.s. נסמן $E|X_i|=a$. ניקח $\delta>0$ כך ש $a+\delta<1$ (למשל $\frac{a-\delta}{2}$). נסתכל על המאורעות $A_n^c=\{|X_n|>\underbrace{(a+\delta)^n}_{\varepsilon_n \to 0}\}$

$$P(|Y_n|>(a+\delta)^n) \underset{\text{מרקוב}}{\le} \frac{E|Y_n|}{(a+\delta)^n} = \frac{\prod_{k=1}^n E|X_k|}{(a+\delta)^n} = \frac{a^n}{(a+\delta)^n} = \left(\frac{a}{a+\delta}\right)^n \longrightarrow 0$$

ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n|>(a+\delta)^n) < \infty$

$0 = P(|X_n| \ge (a+\delta)^n \text{ infinatly often})$

נשים לב ש $\{\exists_N, \forall n\ge N, \underbrace{|Y_n|<(a+\delta)^n}_{A_n}\}^c = \{\underbrace{|Y_n| \ge (a+\delta)^n\ i.o}_{A_n^c}\}$

$\Phi(k)<1$ לכל $k$

**תרגיל** יהיו $X_1, X_2, \dots$. $X_i \sim N(0,1)$ הוכיחו כי:

א. $P(\exists N, \forall n\ge N, \max\{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots X_n\}\ge 3\} = 1$

ב. $P(\exists N, \forall n \ge N \quad \max\{X_{n+1},\dots,X_{n+20}\}\ge 3\}$

**הוכחה:** א. צ"ל $P(\liminf\{\max\{X_{n+1},\dots,X_{2n}\}\ge 3\})=1$

מספיק כי נוכיח $P(\limsup\{\max\{X_{n+1},\dots,X_{2n}\}\le 3\})=0$

$\Updownarrow$

$P(X_k\le 3, \forall k=n+1,\dots,2n) \underset{\text{ב"ת}}{=} \prod P(X_i\le 3) = \Phi(3)^n \longrightarrow 0 \quad (\Phi(3)<1)$

$\sum P(\max\{X_{n+1},\dots,X_{2n}\}\le 3) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(3)^n < \infty$

$\Leftarrow$ $P(\max\{X_{n+1},\dots,X_{2n}\}\le 3) \underset{\text{ב"ק}}{=} 0$

ב. $P(\max\{X_{n+1},\dots,X_{n+20}\} = \Phi(3)^{20} = \infty$ ! לא אפס

$\sum P(A_n) = \infty$

$A_n, A_{n+1}$ תלויים (לא בזוג) ולכן לא ניתן לומר ישירות

אם ניקח קפיצות של 20 $A_1, A_{21}, A_{41}$ אז נקבל מאורעות.

$\sum P(A_{20(n-1)+1}) = \infty$ והם ב"ת $\Longrightarrow P(\limsup A_{20(n-1)+1}) = 1$

$\Downarrow$ $P(\limsup A$

יערית
אבוטן.

**אי שיוויון מרקוב:**

אם $X$ משתנה מקרי כך ש־ $E|X| < \infty$ אזי לכל $a$ :

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}$$

הוכחה : $\varphi(x) = |x|\mathbf{1}_{(|x|\geq a)}$ . **אזי כיוון ש־** $a\mathbf{1}_{(|x|\geq a)} \leq \varphi(x) \leq |x|$ :

$$E|X| \geq E\left(a\mathbf{1}_{(|x|\geq a)}\right) = aE\left(\mathbf{1}_{(|x|\geq a)}\right) = aP(|X| \geq a)$$

נחלק ב־ $a$ ונקבל:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}$$

8.1.09

## סוגי התכנסויות

(1) בהסתברות $X_n \xrightarrow{P} X$ $\quad \forall \varepsilon>0\ P(|X_n-X|>\varepsilon) \longrightarrow 0$

(2) בתוחלת $X_n \xrightarrow{L^1} X$ $\quad d(X_n,X)=E|X_n-X| \longrightarrow 0$

(3) בתוחלת בריבוע $X_n \xrightarrow{L^2} X$ $\quad E|X_n-X|^2 \longrightarrow 0$

(4) כמעט-תמיד $X_n \xrightarrow{a.s} X$ $\quad P(\lim_{n\to\infty}|X_n-X|=0)=1$

תרגיל

יהיו $A_1,A_2,\ldots$ מאורעות וסדרה $\{C_n\}$ כך ש- $\lim C_n=\infty$, מצאו בכל אחת מהגדרות ההתכנסות תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $X_n=C_n 1_{A_n} \xrightarrow{?} 0$

(1) בהסתברות $C_n 1_{A_n} \xrightarrow{P} 0 \iff P(|C_n 1_{A_n}-0|>\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \forall\varepsilon>0$

$$P(C_n 1_{A_n}>\varepsilon) = P\left(1_{A_n}>\frac{\varepsilon}{C_n}\right) \underset{\downarrow}{=} P(A_n) \longrightarrow 0$$

$C_n\longrightarrow\infty$

$\frac{\varepsilon}{C_n} << 1$

תנאי הכרחי ומספיק $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(2) $X_n \xrightarrow{L^1} X \iff C_nP(A_n) = E|C_n 1_{A_n}| \longrightarrow 0$

(3) $X_n \xrightarrow{L^2} X \iff E(C_n 1_{A_n})^2 = C_n^2P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(4) $X_n \xrightarrow{a.s} X$ איך מוכיחים $P(\lim X_n=0)=1$, לוקחים $\varepsilon_n \searrow 0$ מגדירים $B_n=\{X_n>\varepsilon_n\}$ ומוכיחים $\sum P(B_n)<\infty$ ומבורל קנטלי $P(B_n\ i.o)=0$

$P(B_n) = P(C_n 1_{A_n}>\varepsilon_n) \underset{\downarrow}{=} P(A_n)$

עבור n מספיק גדול.

תנאי מספיק: $\sum P(A_n)<\infty$

אם $A_1,A_2,\ldots$ בת"ל זהו גם תנאי הכרחי

אי אפשר למצוא תנאי הכרחי לכל המקרים

$C_n=n \quad , \quad X\sim U(0,1) \quad , \quad A_n=\{0<X<\frac{1}{n}\}$

$$\forall\varepsilon>0\ P(|C_n 1_{A_n}|>\varepsilon) \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{n} = P(X<\frac{1}{n}) \longrightarrow 0$$

מלבד הקטע הזה 0

$X_n \xrightarrow{a.s} 0$

$\sum P(A_n) = \sum \frac{1}{n} = \infty$

בדוגמה זו $X_n \xrightarrow{a.s} 0$, מה נראה אם $X_n \xrightarrow{L^1} 0$

$E(X_n) = E(n\cdot 1_{A_n}) = 1$ לכל $n$ $\quad \not\longrightarrow 0$

מסקנה: $a.s$ ו- $L^1$ לא קשורות זו לזו.

משפט ההתכנסות הדומיננטית של לבג

$X_n \xrightarrow{a.s} X$ ונניח קיים משתנה מקרי $Y$ כך ש:

(א) $E|Y| < \infty$

(ב) $|X_n|, |X| < Y$ לכל $n$ ($Y$ חוסם אותם)

אז: $E(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} E(X)$

חוק המספרים הגדולים

(א) אם $X_1, X_2, \dots$ i.i.d כך ש $E|X_1|^2 < \infty$, אז $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i \xrightarrow[P, L^2]{} E(X_1) = \mu$ ($\Downarrow$ $L^1$)

(ב) $E|X_1| < \infty$, אז $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} \mu$

לפי החוק החזק $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{a.s} \mu = E(X_1)$ $\underset{\text{תרגיל}}{\Longrightarrow}$ $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{L^1} \mu$

נראה: חוק חזק $\Leftarrow$ $\frac{1}{n}S_n \to E(X_i) = \mu$

הוכחה: $\frac{1}{n}S_n - \mu \xrightarrow{a.s} 0$ מהחוק החזק

כאן-ן $\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \underset{\Delta}{\le} \frac{1}{n}|S_n| + |\mu| \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_1|\right) + |\mu| = Y$

$E(Y) = \frac{1}{n}\sum \underset{\alpha<\infty}{E|X_i|} + |\mu| = \alpha + |\mu| < \infty$

ממשפט ההתכנסות הדומיננטית $E\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \xrightarrow{n\to\infty} E(0) = 0$

תרגיל יהי $X_1, X_2, \dots$ i.i.d $X_i \sim U(0,1)$, נגדיר $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$

(א) הראו $Y_n^{1/n} \xrightarrow[\text{כמעט}]{a.s} \alpha$. מהו $\alpha$?

(ב) מה לגבי $E(Y_n^{1/n})$?

פתרון (א) $Y_n^{1/n} = \prod_{i=1}^{n} X_i^{1/n}$

כאשר $Y$ אינו כפל, נפעיל $\ln$ ונראה לאן זה שואף: $\ln Y_n^{1/n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underset{Z_i}{\underbrace{\ln(X_i)}}$

$(\ln(X_n) = Z_n)$

$E|Z_n| = E|\ln(X_n)| \underset{X_n \sim U(0,1)}{=} \int_0^1 |\ln(x)|\,dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln(x)| f_X(x)\,dx =$ $\quad (f_X(x) = 1_{(0,1)})$ 1 אם בקטע $(0,1)$, 0 אם לא בקטע

$= \int_0^1 -\ln(x)\,dx = x - x\ln x \Big|_0^1 = 1$

$\ln < 0$ בתחום זה

$Z_1, Z_2, \dots$ הם i.i.d כי הם פונקציות $f(X_i)$ של i.i.d ולכן מהחוק החזק:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \longrightarrow E(\ln(X_1)) = -E|\ln(X_1)| = -1$

נפעיל $e^{\square}$ שהיא פונק' רציפה ב-1

$Y_n^{1/n} \longrightarrow e^{-1}$ $\left(\lim e^{\ln(Y_n^{1/n})} = e^{\lim \ln(Y_n^{1/n})}\right)$ כי e זה בתחום רציפות

(ג) $Y_n^{1/n} \le 1$ , $E(1) < \infty$ ומשפט ההתכנסות הדומיננטית:

$$E(Y_n^{1/n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(e^{-1}) = e^{-1}$$

אבל יותר פשוט לחשב ישירות:

$$E(Y_n^{1/n}) = E\prod_{i=1}^{n} X_i^{1/n} = \prod_{i=1}^{n} E(X_1)^{1/n}$$

$$E(X_1)^{1/n} = \int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}$$

$$\Downarrow$$

$$E(Y_n^{1/n}) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = e^{-1}$$

תרגיל: אינטגרציית Monte Carlo (מסקנות מ החוק החזק)

תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מדידה, כך ש $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$

יהי $u_1, u_2, \ldots$ i.i.d , $u_i \sim U(0,1)$ ונגדיר $I_n = \frac{1}{n}(f(u_1)+f(u_2)+\ldots+f(u_n))$

(א) הראו $I_n \xrightarrow{a.s} I = \int_0^1 f(x)dx$ - e

(ב) בהינתן $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$ מצאו חסם ל $P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}})$

פתרון

(א) $f(u_1), f(u_2), \ldots$ i.i.d $\quad E|f(u_i)| = \int_0^1 |f(x)|dx \overset{\text{נתון}}{<} \infty$ ולכן

מהחוק החזק $\quad I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) \longrightarrow \int f(x)dx = E(f(u_i))$

(ב)

$$E(I_n - I) = 0$$

$$Var(\underset{\text{קבוע}}{I_n - I}) = var(I_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(f(u_i)) \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(f(u_i))^2 =$$

$$= \frac{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}{n}$$

לפי צ'בישב

$$P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}) \le \frac{Var(I_n)}{(a/\sqrt{n})^2} = \frac{\int_0 |f(x)|^2}{a^2}$$

אם $a = c\int_0^1 |f(x)|dx$ נקבל $P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}) < \frac{1}{c^2}$

בשיטה זו נמדד את דרגת הקירוב.

15.1.08

## הלמה של קרונקר

אם $a_n \nearrow \infty$ (סדרה מונוטונית עולה ממש לאינסוף) כך ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} < \infty$

אזי $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

**משפט צזרו:**

אם $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ קיים ו $a_n \nearrow \infty$ אזי $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - a_{k-1})}{a_n} b_k \to b$ $a_0 = 0$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 = a_n$$

אם $b_k$ קבוע - זה ברור

אם $b-\varepsilon < b_k < b+\varepsilon$ יחד עם הטלסקופה ש $b-\varepsilon < L_n < b+\varepsilon$

$\sup|b_n|$ קיים כי $b_n$ סדרה מתכנסת.

**הוכחת הלמה**

נגדיר $a_0 = 0,\ b_0 = 0$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} \longrightarrow b_\infty \quad \text{(נתון שהטור מתכנס)}$$

נשים לב ש $a_n(b_n - b_{n-1})$

אזי

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left[a_k[b_k - b_{k-1}]\right] =$$

$$= \frac{1}{a_n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{a_n}\left[a_n b_n + \sum_{k=2}^{n} a_{k-1} b_{k-1} - \sum_{k=2}^{n} a_k b_{k-1}\right] =$$

$$= \underbrace{b_n}_{\to b_\infty} - \underbrace{\frac{1}{a_n}\left[\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) b_{k-1}\right]}_{\to b_\infty \text{ (צזרו)}} \longrightarrow b_\infty - b_\infty = 0$$

**משפט 1:** תנאי מספיק להתכנסות טור רנדומי

נניח ש $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת כך ש $\sum_{i=1}^{\infty} var(X_i) < \infty$

אזי $\sum_{i=1}^{n} X_i$ מתכנס כ.ת.

**משפט שלושת הטורים של קולמוגורוב:** תנאי הכרחי ומספיק

יהי $X_1, X_2,$ סדרת מ"מ ב"ת. יהי $A > 0$ כלשהו. נגדיר $Y_i = X_i \mathbb{1}_{(X_i \le A)}$

$\sum X_i$ מתכנס כ.ת אמ"מ: (א) $\sum P(X_i \neq Y_i) = \sum P(|X_i| > A) < \infty$

(ב) $\sum_{i=1}^{\infty} E(Y_i) < \infty$ (ג) $\sum_{i=1}^{\infty} Var(Y_i) < \infty$

**דוגמא:** נגדיר $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת כך ש

$$P(X_n=n)=P(X_n=-n)=\frac{1}{2n^2}$$

$$P(X_n=\tfrac{1}{n})=P(X_n=-\tfrac{1}{n})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}$$

נראה ש $\sum X_i$ מתכנס כ.ת.

**פיתרון:** נבדוק את תנאי משפט שלושת הטורים: יהי $A>0$

(א) $P(|X_n|>A) \overset{\text{החל מ-}n\text{ מסוים}}{=} P(X_n=n)+P(X_n=-n)=\frac{1}{n^2}$

ולכן $\sum P(|X_n|>A)$ מתכנס.

(ב) $E(X_i \mathbb{1}_{\{|X_i|\le A\}})=0<\infty \Rightarrow \sum E(Y_i)=0<\infty$

(ג) $Var(Y_i)=Var(X_i \mathbb{1}_{\{X_i\le A\}}) \overset{E(Y_i)=0}{=} E(Y_i^2) =$

$\overset{\text{החל מ-}n\text{ מסוים}}{=} \frac{1}{n^2}\left[P(X_i=\tfrac{1}{n})+P(X_i=-\tfrac{1}{n})\right] \le \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \sum V(Y_i)<\infty$

**מסקנה:** שלושת תנאי משפט שלושת הטורים מתקיימים ולכן $\sum X_i$ מתכנס כ.ת.

**טענה:** יהיו מ"מ $X_1, X_2, \dots$ ב"ת שה"ה כך ש $Var(X_i)=c<\infty$, $E(X_i)=0$

אזי לכל $\varepsilon>0$: $\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} S_n \xrightarrow{a.s} 0$

(תזכורת: $\frac{S_n}{\sqrt{n\,var(X_i)}} \longrightarrow X\sim N(0,1)$ משפט CLT)

**הוכחה:** נגדיר $a_n=\sqrt{n}(\ln n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ונסתכל על המ"מ $\frac{X_1}{a_1}, \frac{X_2}{a_2}, \dots$

$$var\left(\frac{X_i}{a_i}\right)=\frac{1}{a_i^2}\cdot var(X_i)=\frac{c}{a_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{X_i}{a_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{a_i^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{c}{k\ln(k)^{1+2\varepsilon}}<\infty \quad \left(\sum\frac{1}{k\ln k^{1+a}} \xrightarrow{a>0} \text{מתכנס}\right)$$

ולכן לפי משפט 1 נקבל ש $\sum\frac{X_i}{a_i}$ מתכנס כ.ת.

מהלמה של קרונקר.. $(a_n\nearrow\infty)$ $\quad \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{a.s} 0$

**תרגיל** (3 בגיליון): האם קיימת סדרה $\{S_n\}\subseteq\{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$, $S_n\in(-1,1)$ כך שלכל $k$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S_nS_{n+1}\cdots S_{n+k}$ מתכנס.

**פתרון:** נגדיר מ"מ $X_1, X_2, \dots$ ב"ת שה"ה באופן הבא: (הטלת מטבע)

$$P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2}$$

**תרגיל בית:** אם $X_1, X_2, \dots$ כמו כאן אז נגדיר $Y_n=\prod_{i=0}^{k}X_{n+i}$ אזי

$Y_1, Y_2, \dots$ הם מ"מ ב"ת שה"ה כך ש: $P(Y_n=1)=P(Y_n=-1)=\frac{1}{2}$

יהי $k\in\mathbb{N}$ ונגדיר $Y_n^k=\prod_{i=0}^{k}X_{n+i}$

מתרגיל בית ראינו ש $Y_1^k, Y_2^k, \dots$ הם הטלות מטבע הוגן ב"ת.

$$\sum var\left(\frac{Y_n^k}{n}\right) = \sum \frac{var(Y_n^k)}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

ולכן $\sum \frac{Y_n^k}{n}$ מתכנס כ.ת.

נסמן $N_k = \{ \omega / \sum \frac{Y_n^k(\omega)}{r}$ מתכנס $\}$ (קבוצה במידה 0 =)

ולכן $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ קבוצה ממידה 0 כאיחוד בן מנייה של כאלה

ולכן $P(\sum \frac{Y_n^k}{n}$ מתכנס לכל $k) = 1 - P(N) = 1$

ולכן בשיטה כמאת נגרים סדרה $\{S_n\}$ שבאמצע תמיד תיתן לנו את

ההתכנסות שרצינו, בפרט ק״מת לפחות סדרה אחת כזו.

22.1.09

## התניה

- מאמצא להסתברות: X,Y מ"מ דיסקרטיים, והגדרנו מ"מ $(Y|X)$

$$P(Y=\ell|X=k)=\frac{P(X=k,Y=\ell)}{P(X=k)}$$

בצורה שקולה כאשר יש צפיפות משותפת, ניתן להגדיר מ"מ $(Y|X=x)$ ע"י צפיפות:

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

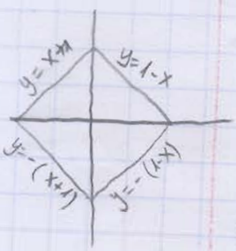
$$P(X\le t,Y\le y)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{y}f_X(x)f_{Y|X=x}(y)\,dy\,dx=\int_{-\infty}^{t}f_X(x)\,P(Y\le y|X\le x)$$

למ"מ זה יש פונק' הסתברות מצטברת

$$F_{Y|X=x}(y)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X=x}(t)\,dt$$

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{f_{Y|X=x}(y)\cdot f_X(x)}{f_Y(y)}\left(=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\right)$$

דוגמה: יהי $(X,Y)$ מ"מ שנבחר בהתפלגות אחידה בריבוע שקודקודיו $(1,0),(0,1),(0,-1),(-1,0)$. חשבו את הצפיפות $Y|X=x$




השית יש לחשב $f_{X,Y}(x,y)$, $f_X(x)$. נסמן את הריבוע ב-D

$$f_{X,Y}(x,y)\overset{\text{(התפלגות אחידה)}}{=}\frac{1}{vol(D)}\cdot\mathbb{1}_D(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1,\ -(1-|x|)\le y\le 1-|x|\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נחשב מכאן את $f_X(x)$

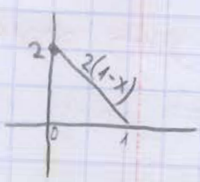
$-1<x<1$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{-(1-|x|)}^{1-|x|}\frac{1}{2}\,dy=1-|x|$$

ובסה"כ, נציב בנוסחה:

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{2(1-|x|)}\cdot\mathbb{1}_{(-(1-|x|),\,1-|x|)}(y)$$

(שים לב, ש- $Y|X=x\sim U(-(1-|x|),(1-|x|))$)




תרגיל: יהי X מ"מ עם צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

יהי Y מ"מ עם התפלגות מותנה $(Y|X=x)\sim U(x,1)$

יהי Z מ"מ ב"ת ב-X,Y כך ש- $P(Z=1),P(Z=0)=\frac{1}{2}$

(א) מצאו את הצפיפות המשותפת של X,Y

(ב) מצאו את ההתפלגות המותנה של X בהינתן $Y=y$.

(ג) נגדיר $U=XZ+(1-Z)Y$, $V=(1-Z)X+ZY$. האם $U,V$ ב"ת?

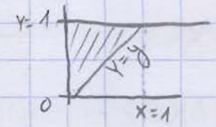
פיתרון

(א)

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_{Y|X=x}(y)=\begin{cases}2(1-x)f_{Y|X=x}(y) & 0<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-x)\cdot\frac{1}{(1-x)}\,\mathbb{1}_{(x,1)}(y) & 0<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}=\begin{cases}2 & 0<x<1,\ x<y<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$(X,Y)\sim U(D)$ $\quad\left(D=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ x<y<1\}\right)$




(ב) נשתמש בנוסחת כ"ס. לשם כך נחשב תחילה את $f_Y(y)$

$$f_Y(y)=\int_0^y 2\,dx=2y \implies f_Y(y)=2y\,\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$

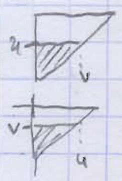
$$f_{X|Y=y}(x)\overset{\text{כ"ס}}{=}\frac{f_X(x)f_{Y|X=x}(y)}{f_Y(y)}\underset{0<y<1}{=}\frac{2\,\mathbb{1}_D(x,y)}{2y}=\begin{cases}\frac{1}{y} & 0<x<y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}=\frac{1}{y}\mathbb{1}_{(0,y)}(x)$$

נשים לב ש: $(X|Y=y)\sim U(0,y)$

(ג) כאשר $Z=1$ $u=X$ , $V=Y$. כאשר $Z=0$ $V=X$ $u=Y$

$$F_{U,V}(u,v)=P(U\le u,V\le v)=P(U\le u,V\le v/Z=0)P(Z=0)+P(U\le u,V\le v/Z=1)P(Z=1)$$

נחשב בנפרד:




$$P(U\le u,V\le v/Z=0)=P(Y\le u,X\le v)=\frac{u\cdot v}{2}\cdot 2=u\cdot v$$

$$P(U\le u,V\le v/Z=1)=P(X\le u,Y\le v)=\frac{v\cdot u}{2}\cdot 2=v\cdot u$$

ולכן $F_{U,V}(u,v)=u\cdot v\cdot\frac{1}{2}+v\cdot u\cdot\frac{1}{2}=u\cdot v$

נשים לב $(U,V)\sim U([0,1]^2)$

ואכן הם ב"ת. מצב של ב"ת מצפיפות כאשר ההתפלגות אחידה ב $D \Leftrightarrow D$ מלבן $[a,b]\times[c,d]$

$D=[0,1]\times[0,1]$ קיבלנו ש $U,V$ ב"ת.

תוחלת מותנה (מקרה כללי) - לא דורשים צפיפות

הגדרה כללית: יהיו $X,Y$ מ"מ, אזי $E(Y|X)$ הינו מ"מ שמקיים:

(1) נוסחת התוחלת השלמה $E(E(Y|X))=E(Y)$

(2) לכל מאורע $A$ ששייך ל $\sigma(X)$ $\left(=\sigma(a\in\mathbb{R},\{X\le a\})\right)$ $\quad E(\mathbb{1}_A E(Y|X))=E(Y\mathbb{1}_A/X)$

נוסחת השונות השלמה

$$var(Y)=E(var(Y/X))+var(E(Y/X))$$

כאשר

$$var(Y/X)=E(Y^2/X)-E(Y/X)^2$$

$$var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$$

הוכחה:

$$E(var(Y/X))+var(E(Y/X))=E\left[E(Y^2/X)-(E(Y/X))^2\right]+E\left(E(Y/X)^2\right)-\left(E(E(Y/X))\right)^2=E(Y^2)-(E(Y))^2$$

(לפי נוסחת התוחלת השלמה: $\left(E(E(Y/X))\right)^2=(E(Y))^2$)

**תרגיל** עוצמת המשקל של חלקיק מתפלג אחיד בקטע (0,1). הציון שמקבל החלקיק

נסמנו Y, מתפלג $Y|_{X=x} \sim exp(1+x)$, חשבו את $E(Y)$, $Var(Y)$, $Cov(X,Y)$.

**פיתרון** $Y/X \sim exp(1+x)$ , $E(Y|x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1+x}$ (מנוסחת התוחלת השלמה).

$\underline{E(Y)} = E(E(Y|x)) = E\left(\frac{1}{1+x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x} f_X(x)\,dx \underset{x\sim U(0,1)}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx =$

$= \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln(2)$

$Var(Y/X) = \frac{1}{(1+x)^2} \left(= \frac{1}{\lambda^2}\right)$ (כי $Y/X \sim exp(1+x)$)

ולכן

$\underline{Var(Y)} = E(var(Y|x)) + Var(E(Y|x)) =$

$= E\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) + Var\left(\frac{1}{1+x}\right) = E\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) + E\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) - \left(E\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} - \ln^2 2$

$\underline{Cov(X,Y)} = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(XY/X) = X\,E(Y/X)$ כי סופי $E(|Y|)<\infty$ , $E(|XY|)<\infty$

$E(XY) = E\left(\frac{X}{1+X}\right)$