16.11.08

משתנים מקריים

$(\Omega, \mathcal{F})$

σ-אלגברה קב' נק'

מ"מ הוא פונק' ממשית $X:(\Omega,\mathcal{F})\to\mathbb{R}$ כך ש:

$X^{-1}(-\infty,x]$ הוא קב' מדידה (שייך ל-$\mathcal{F}$)

(א) נניח X מ"מ. נגדיר $Y=\max(X,0)=X_+$: $Y(\omega)=\begin{cases}X(\omega) & X(\omega)>0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

יהי $C>0$, אז $\{X\le c\}=\{Y\le c\}$. $\{X\le c\}$ היא מדידה לפי הנחה

ולכן גם $\{Y\le c\}$ היא מדידה. (דוגמה, אם $X=-5$, אז $\{X\le 3\}=\Omega$)

נכון גם עבור $C=0$. מה לגבי $c<0$? מהי הקבוצה $\{Y\le c\}$? ϕ שהיא מדידה.

(ב) X ו- Y מ"מ. אז $\max(X,Y)$ הוא מ"מ. $Z\overset{\text{מ"מ}}{=}\max(X-Y,0)$.

$Z+Y$ מ"מ. $Z+Y=\max\{X,Y\}$.

(ג) נניח כי $X_1,X_2,\dots$ היא סדרה של מ"מ מונוטונית לא יורדת, ונניח $\lim_n X_n(\omega)<\infty$ לכל $\omega\in\Omega$, אז $\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$ הוא מ"מ.

הוכחה: $c\in\mathbb{R}$, מדוע $\{X_\infty\le c\}$ מדידה? מתי $\omega\in\Omega$ נמצא בקבוצה כי $X_\infty(\omega)\le c$

זה אומר שלכל n $X_n(\omega)\le c$, כלומר, $\omega\in\bigcap\{X_n\le c\}$.

כלומר: $\{X_\infty\le c\}=\bigcap\{X_n\le c\}$. הכיוון הפוך $\subseteq$. נראה עכשיו $\supseteq$:

אם עבור כל משתנה מקרי $\{X_i\le c\}$ אזי בוודאי גם הגבול $\{X_\infty\le c\}$.

(ד) תהי $X_1,X_2,\dots$ סדרת מ"מ, כך שלכל $\omega\in\Omega$, $\limsup_n X_n(\omega)<\infty$, אז

$X_{sup}=\limsup_n X_n$ הוא מ"מ.

הוכחה: $Y_{n,k}=\max(X_k,\dots,X_n)$ $n\ge k$. נקבע את k. נביט על

הסדרה $\{Y_{n,k}\}_n$. זוהי סדרה מונוטונית לא יורדת של מ"מ. ואז נשתמש

בסעיף (ג). לפי (ג), הגבול $Y_{n,k}$ $(Z_k=\lim_n Y_{n,k})$ הוא מ"מ.

$Z_1,Z_2,Z_3,\dots$ היא סדרה מונוטונית לא עולה של מ"מ (המינוס שלה לא יורדת,

ואז שוב לפי ג'), לכן הגבול (X_{sup}) הוא מ"מ.

(ה) $X_1,X_2,\dots$ היא סדרה של מ"מ כך שלכל $\omega\in\Omega$ $\lim_n X_n(\omega)$ קיים.

אז $\lim X_n$ הוא מ"מ. $(\lim X_n=X_\infty$ סימון$)$.

הוכחה: $c\in\mathbb{R}$. מדוע $\{X_\infty\le c\}$ היא קבוצה מדידה. אם הגבול קיים אז

הוא בהכרח שווה ל $\limsup X_n$ אבל לפי ג' $\lim_{sup} X_n$ קיים ולכן

גם $X_\infty=\lim X_n$ קיים.

לעיתים קרובות, נשתמש ב $\overline{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ בתור איברי הסדרה ונבון ב $\overline{\lim_n} \overline{X}_n$.

(1) פונק' מציינת הינה מהטיפוס: $A \in B$ $(A \in \mathcal{F})$ $\mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

יהי $A_1, A_2, \dots$ סדרת מאורעות מדידים.

נגדיר פונק' X כמו כן $X(\omega)=\begin{cases}1 & \text{אם } \omega \text{ ש"ע ל-} A_n \text{ אינס'}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, נראה X מדידה ?

$X = \overline{\lim_n} \mathbb{1}_{A_n}$ היא קבוצה מדידה. בפרט $\{X=1\}$ היא קבוצה מדידה.

כיצד נראה זאת ישירות בעזרת ה A_n-ים ?

$B_m = \bigcup_{n\ge m} A_n$ $\quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \quad$ $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$

$\{X=1\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\ge m} A_n$.

מה המשמעות של $\{\liminf_n \mathbb{1}_{A_n} = 1\}$? $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n\ge m} A_n$ ולכן מדידה.

סימון: הקבוצה הראשונה מסומנת $\overline{\lim_n} A_n = \{A_n \text{ i.o}\}$

" השניה " $\underline{\lim}_n A_n$

(ג) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא מדידה בורל אם היא מדידה ב $(\mathbb{R},B)$
σ-שדה בורל.

אם f רציפה, אזי f מדידה.

$f^{-1}(U)$ היא פתוחה לכל U פתוחה. בפרט $f^{-1}(-\infty,c)$ היא פתוחה.

קבוצה פתוחה היא מדידה בורל.

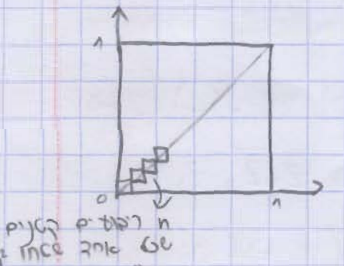
(ה) יהי X מ"מ ! $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה, אזי $f\circ X = f(X)$ הוא מ"מ.

הוכ' $\{f\circ X < c\}$ היא קבוצה מדידה. נגדיר $A=f^{-1}(-\infty,c)$, זוהי קבוצה מדידה (תמונה הפוכה של קב' מדידה) ב $\mathbb{R}$. $B=X^{-1}(A)$ קבוצה מדידה ב Ω.

$\{f\circ X < c\} = B$

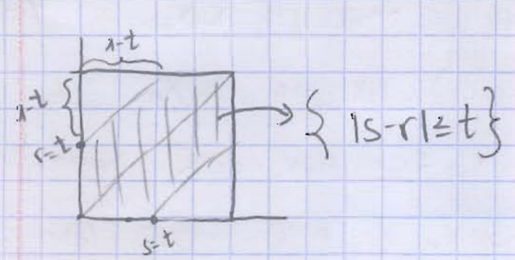
פונקציית ההתפלגות המצטברת

$$F_X(t) = P(X\le t)$$

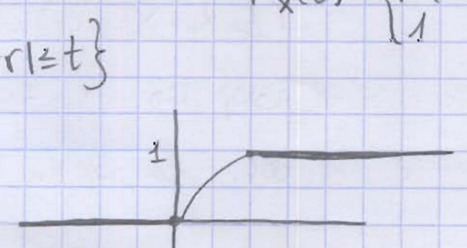


(א) דוגמא: $\Omega=[0,1]^2$ $\quad \omega=(s,r)$ מגדיר ע"י $X(\omega)=|s-r|$

$P(X=0)=?$ $\quad 0$ (קו ישר).



$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1-(1-t)^2 & 0<t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$



הפונק' תיראה כך:

פונק' F_X רציפה!

(ב) $\Omega=\{q_1,q_2,\dots\}$ (הרציונליים על $[0,1]$) $P(q_n)=\frac{1}{2^n}$

נגדיר $X(q_n)=q_n$. איך $F_X(t)$ נראית? קשה לתאר

$F_X(t)\le F_X(q_1)-\frac{1}{2}$ $(t<q_1)$

תכונות פונק' ההסתברות המצטברת: $F_X(t)=P(X\le t)$

* $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$ $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$

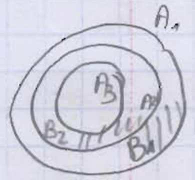
** F רציפה מימין.

*** F מונוטונית לא יורדת.

נוכיח את **: יש להראות ש $F_X(t_n)\to F_X(t)$ כאשר $t_n\searrow t$

נגדיר $A_n=\{X\le t_n\}$ $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\dots$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{X\le t\}$

יש להראות ש: $\lim_n P(A_n)=P(\bigcap_n A_n)$ (יש להניח σ-אדיטיביות, אחרת יוצא $0=1$).



$B_n=A_n-A_{n+1}$, $A_1=\bigcup_n B_n$

$P(A_1)=\sum_n P(B_n)+P(\bigcap A_n)$

באותו אופן $P(A_k)=\underbrace{\sum_{n\ge k}P(B_n)}_{\text{שואף ל-0.}}+P(\bigcap A_n)$

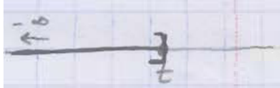
19.11.08

התכונה השנייה נובעת מהטענה הכללית הבאה:

אם $A_n\searrow A$ $\Leftarrow$ $P(A_n)\searrow P(A)$ (נובע מ σ-אדיטיביות)

(באופן דומה, אם $A_n\nearrow A$ $\Leftarrow$ $P(A_n)\nearrow P(A)$)

טענה: $F(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת את שלוש התכונות אז קיימת (Ω,P,B) ומ"מ X כך ש $F=F_X$



הוכחה: נבנה על $(\mathbb{R},B)$ (B - σ שדה בורל). נגדיר את P כדלהלן:

$P(-\infty,t]=F(t)$

נרחיב את הגדרת P לקטעים סגורים מימין ופתוחים משמאל

$P((s,t])=P((-\infty,t])-P((-\infty,s])$

נרחיב את ההגדרה לקטעים פתוחים (s,t)

$P((s,t))=\lim_{t_n\nearrow t}P((s,t_n])$

$P((s,t))=1-P((-\infty,s])-P([t,\infty))$ וכו

$P((t,\infty))=1-P((-\infty,t])$

$P([t,\infty))=\lim_{t_n\searrow t}P((t_n,\infty))$

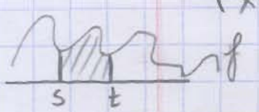
ה-P שהגדרנו עד כה תקיים את התנאי שאם $A_n \searrow \phi$ (A_n היא סדרה של מאורעות בשדה

-- זה הסגור לאיחודים וחיתוכים סופיים -- שנוצר ע"י הקטעים), אזי $P(A_n) \searrow 0$.

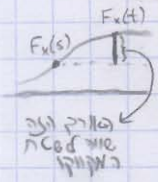
דוגמא: $A_n=(-\infty,t_n)$, $t_n \searrow -\infty$, $A_n \searrow \phi$ ולמעשה התכונה השלישית מבטיחה ש-$P(A_n) \searrow 0$

תכונה 2 מבטיחה כי התנאי מתקיים ולכן ניתן להרחיב את P לכל B.

הגדרה: $(\mathbb{R},P,B)$ מושלם. עכשיו נגדיר את X להיות פונק' הזהות $F_X(t)=F(t)$



פונק' צפיפות:



לעיתים $F_X(t)$ יכולה להתקבל באופן הבא, תהי f פונק' ממשית מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ אי-שלילית.
$F_X(t)-F_X(s)=\int_s^t f(x)dx$. במקרה זה נאמר ש-f היא פונק' הצפיפות של F

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{t} f(x)dx=\lim_{s\to-\infty}\int_s^t f(x)dx$$

<u>ההתפלגות של X</u> יהי X מ"מ. נגדיר $P_{\mathbb{R}}(B)=\underbrace{P(X\in B)}_{\{\omega\in\Omega / X(\omega)\in B\}}$ (B בורל ב-$\mathbb{R}$)

$P_{\mathbb{R}}$ היא פונק' הסתברות על $(\mathbb{R},B)$. $P_{\mathbb{R}}(-\infty,t)=F_X(t)$

<u>חוק ההתפלגות</u> (=ההתפלגות) של X היא $P_{\mathbb{R}}$.

ל-2 מ"מ יש אותה התפלגות אם יש להם אותו חוק התפלגות.

הערה: אם ל-2 מ"מ יש אותה התפלגות, אזי יש להם אותה פונ' הסתברות מצטברת.

אם שני מ"מ הם בעלי אותה התפלגות, ויש להן פונק' צפיפות, אזי פונק' הצפיפות זהות.

- האם לכל מ"מ יש פונק' צפיפות?

לא. אם ל-X יש פונק' צפיפות אזי $P(X=t)=0$ לכל t

במקרה זה נאמר של-X <u>אין אטומים</u>.

האם לכל X שאין לו אטומים יש פונק' צפיפות?

23.11.08

תזכורת: (Ω,P,B) X מ"מ, $F_X(t)$ פונק' ההסתברות המצטברת.

פונק' צפיפות: לא לכל X יש פונק' צפיפות f אם לכל a<b $P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$

אם לא X יש פונק' צפיפות אזי לכל x $P(X=x)=0$. כלומר ל X אין אטומים.

(2) שאלה: האם לכל X שאין לו אטומים, יש לו פונק' צפיפות?

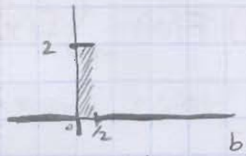
(1) שאלה: האם צפיפות היא הסתברות?

(1) תשובה: לא! למה אולי כן? X מ"מ בדיד $P(a\le X\le b)=\sum_{a\le t\le b}P(X=t)$

אבל ל X יש צפיפות $P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$

למה בכל זאת לא? f אומנם מקבלת ערכים אי שליליים (בדומה להסתברות)

אבל ערכי f לא מוגבלים ע"י 1.



לדוגמה, נגדיר: $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x\le 1/2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b 2dx=2(b-a)\qquad (0<a\le b<1/2)$$

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 2t & 0\le t\le 1/2\\ 1 & 1/2<t\end{cases}$$

אם ל-X יש צפיפות לא ייתכן שקיימת קבוצה בת B כך שמצד אחד: $P(X\in B)>0$ ומצד שני ההסתברות לכל (איבר אחד) של B היא 0.

(2) תשובה: בכלל זה התשובה היא לא!

הגדרה: תומך של ההתפלגות של X הוא קבוצת כל הערכים $t\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ $P(t-\varepsilon<X<t+\varepsilon)>0$. בדוגמה הקודמת?

$$f_X(t)=\begin{cases}2 & t\in[0,1/2],\ t\ne 1/4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

1/4 נמצא בתומך של X במקרה זה.

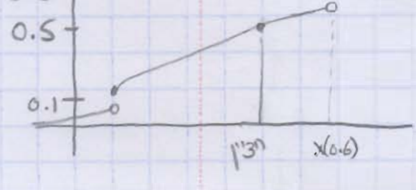
במילים אחרות התומך של X הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר B, כך ש $1=P(X\in B)$

תזכורת: X מ"מ $P_X(B)=P(X\in B)$ זוהי התפלגות שמשרה X על $\mathbb{R}$.

$P_X(\cdot)$ נקראת התפלגות של X, וניתן לקבל אותה מתוך $F_X(\cdot)$

ונאמר, אם כן, של-X ול-Y יש אותה התפלגות אם $F_X=F_Y$

אחוזון של מ"מ



יהי $q\in[0,1]$ אחוזון-q של המ"מ X מוגדר באופן הבא: מספר X_q כך ש

$$P(X<X_q)\le q<P(X\le X_q)$$

לכל X מגדירים את מ"מ המחוצן X^*, $X^*:[0,1]\to\mathbb{R}$, $X^*(q)=X_q$

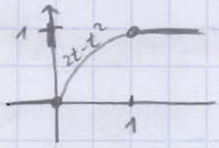
X_q הוא בחירה כלשהי אם יש מספר ערכים אפשריים ל-X_q.

טרנספורמציה חד-מימדית של מ"מ

דוגמה: נחזור ל-$[0,1]^2$ ולמ"מ המוגדר באופן הבא: $X(s,r)=|s-r|$

$F_X(t)=2t-t^2 \quad (0\le t\le 1)$

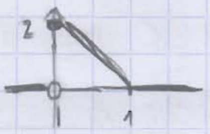
F_X :



האם ל-X יש צפיפות? אם כן, מהי? מהו X^*?

F גזירה למקוטעין. $f=F'$.

F'_X :



מקטע $[0,1]$ אם $a<b$

$$F(a<x\le b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

לכן ל-X יש צפיפות, והיא נתונה ע"י $2-2t$ $\forall t$

נקבע $q\in(0,1)$, מהי X_q

$q=F(X_q)=2X_q-X_q^2$

יחיד! $X^*(q)=X_q$

עכשיו, נניח עושים טרנס' ל-X $\Leftarrow$ $Y=X^2$

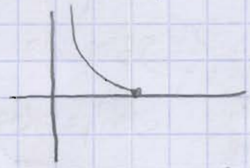
מהי F_Y? האם ל-Y יש צפיפות, אם כן מהי? מהו Y^*?

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)\overset{\text{מונוטוני}}{=}P(X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})=2\sqrt{y}-y$$

ובסה"כ $F_Y(y)=2\sqrt{y}-y$ בין 0 ל-1 (תשובה מלאה: $y>1$ $F_Y(y)=1$, $y<0$ $F_X(y)=0$)

ואת הנגזרת:

$$F'_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}}-1 & 0<y\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$



Y_q הוא המחוצן q של Y.

$q=2\sqrt{Y_q}-Y_q$

דוגמה: X הוא אחיד ב-$[0,1]$, כלומר, $F_X(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t & t\in(0,1)\\ 1 & t\ge 0\end{cases}$

הפונק' גזירה למקוטעין $F'_X(t)=f_X(t)=\begin{cases}1 & t\in(0,1)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. נסמן במקרה זה $X\sim U(0,1)$

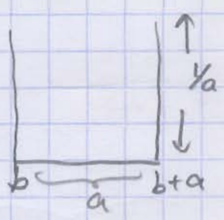
$Y=aX+b$

$$F_Y(t)=P(Y\le t)=P(aX+b\le t)=P\left(X\le\frac{t-b}{a}\right)=F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

ובסה"כ $F_Y(t)=F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$

$$F_Y(t)=\begin{cases}0 & \frac{t-b}{a}\le 0\\ \frac{t-b}{a} & (0,1)\ni\frac{t-b}{a}\\ 1 & \frac{t-b}{a}\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0 & t\le b\\ \frac{t-b}{a} & b\le t\le a+b\\ 1 & t\ge a+b\end{cases}$$

$$F'_Y(t)=f_Y(t)=\begin{cases}0 & t\le b\\ \frac{1}{a} & b\le t\le a+b\\ 0 & t\ge a-b\end{cases}$$



במקרה זה נסמן $Y\sim U(b,a+b)$

שמאל ימין

$$P(Y\ge y)\overset{a>0}{=}P(aX+b\ge y)=P\left(X\ge\frac{y-b}{a}\right)=$$
$$1-P\left(X<\frac{y-b}{a}\right)=1-\lim_{z\to\frac{y-b}{a}}F_X(z)\overset{\text{רציפה}}{=}1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

26.11.08

פונק' הצפיפות וטרנס' חד מימדיות של מ"מ

$X\sim U(0,1)$ מ"מ , $\gamma(x)=ax+b$ נב' הטרנס'. $\qquad \varphi\circ X=\varphi(x)=Y$

באופן כללי יהיו: יהי γ פונק' מונוטונית ממש (עולה או יורדת). X מ"מ.

$Y=\varphi\circ X$. מה: התפלגות Y?

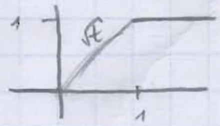
דוגמה: $X\sim U(0,1)$. $\varphi(x)=x^2$ $\qquad f_x(t)=\begin{cases}1 & t\in(0,1)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

הדרך למצוא את f_Y היא באמצעות התפלגות (או פונ' ההתפלגות המצטברת) F_Y.

$$F_Y(t)=P(Y\leq t)=P(X^2\leq t)=P(X\leq\sqrt{t})$$

בשוויון האחרון אנו מסתמכים על כך שγ מונוטונית עולה ממש על התומך של X (הקטע $[0,1]$).

$$P(x\leq\sqrt{t})=F_X(\sqrt{t})=\begin{cases}\sqrt{t} & t\in(0,1)\\ 0 & t\leq 0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$



$$f_Y=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{t}} & t\in(0,1)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

באופן כללי: γ מונוטונית עולה ממש. נניח בנוסף לכך: $F_x(x)$ חלקה. (ב) γ חלקה.

$Y=\gamma\circ X$. מה: F_Y? $\quad P(Y\leq t)=P(\gamma(x)\leq t)=P(X\leq\gamma^{-1}(t))=F_X(\gamma^{-1}(t))$

$$f_Y(t)=F_Y(t)\frac{d}{dt}=f_X(\gamma^{-1}(t))\cdot\left(\gamma^{-1}(t)\frac{d}{dt}\right)=f_X(\gamma^{-1}(t))\cdot\frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))}$$

$$\gamma(\gamma^{-1}(t))=t$$

נגזור

$$\underbrace{\gamma'(\gamma^{-1}(t))\cdot\frac{dt}{t}\gamma^{-1}(t)}_{=\frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))}}=1$$

בדוגמה שלנו $\gamma^{-1}(t)=\sqrt{t}$. $\gamma'(t)=2t$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))}=\frac{1}{\gamma'(\sqrt{t})}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$

$f_x\gamma'(\gamma^{-1}(t))=1$. ולכן $f_Y(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$

מקרה ב: γ מונו' יורדת ממש.

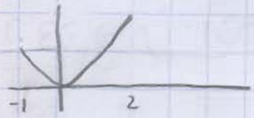
$$F_Y(t)=P(Y\leq t)=P(\gamma(x)\leq t)=P(x\geq\gamma^{-1}(t))=$$

נשתמש בכך של: X אין אטומים (F_x רציפה).

$$P(x>\gamma^{-1}(t))=1-P(x\leq\gamma^{-1}(t))=1-F_X(\gamma^{-1}(t))$$

נגזור ונקבל: $\frac{d}{dt}F_Y(t)=f_Y(t)=-f_X(\gamma^{-1}(t))\cdot\frac{d}{dt}\gamma^{-1}(t)=f_X(\gamma^{-1}(t))\cdot\frac{1}{|\gamma'(\gamma^{-1}(t))|}$

מה קורה כאשר g איננה מונ׳ תמיד. אלא מונוטונית למקוטעין



דוגמה $X \sim U(-1,2)$ $f_X(t) = \begin{cases} 1/3 & t \in (-1,2) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ $g(t) = t^2$.

$$P(Y \le t) = P(Y \le t / X \le 0) \cdot P(X \le 0) + P(Y \le t / X > 0) P(X > 0) = \sqrt{t} \cdot 1/3 + \frac{\sqrt{t}}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$P(Y \le t / X \le 0) = \begin{cases} \sqrt{t} & t \in (0,1) \\ 0 & t \le 0 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

$$P(X \ge \sqrt{t} / X \le 0) = \sqrt{t}$$

$$P(Y \le t / X \ge 0) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{\sqrt{t}}{2} & t \in (0,4) \\ 1 & t \ge 4 \end{cases} = \Big(P(Y \le t / X \ge 0) = P(X \le \sqrt{t} / X \ge 0) \Big)$$

$$= \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{\sqrt{t}}{3} + \frac{\sqrt{t}}{2} & t \in (0,1) \\ 1/3 + \frac{\sqrt{t}}{3} & t \in [1,4) \\ 1 & t \ge 4 \end{cases}$$

30.11.08

פונק' ההסתברות המצטברת ופונק' הצפיפות של טרנספורמציה. (של מ"מ)

γ מונוט' וחלקה. X מ"מ. צפיפות f_x. נגדיר $Y=\gamma\circ X$

$$f_Y(t)=f_X(\gamma^{-1}(t))\frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))}$$

נרחיב כעת למקרה שבו γ מונוטונית וחלקה למקוטעין.

תרגיל: $X\sim U(-1,2)$ $\quad f_X=\begin{cases}1/3 & t\in[-1,2]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $\gamma(x)=x^2$, $Y=\gamma\circ X$

$$f_Y(t)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{t}} & t\in(0,1)\\ \frac{1}{2\cdot 3\sqrt{t}} & t\in(1,4)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נניח ש γ היא כזו שעבור מס' סופי של קטעים $I_1,\dots,I_n$

γ היא מונוטונית (עולה או יורדת ממש) בכל אחד מהם.

X הוא בעל פונק' צפיפות f_x. $Y=\gamma\circ X$, מה: F_Y ומה: f_Y?

נגדיר $C_i=X^{-1}(I_i)$ (בה"כ $I_1,\dots,I_n$ הוא חלוקה של הישר)

לכן $C_1,\dots,C_n$ היא חלוקה של המרחב (Ω,P,B). $P(C_i)=P_i$, $\sum P_i=1$

נבחר על C_i ונרמל את $\tilde{P}$: $\quad \tilde{P}(B)=\frac{P(B)}{P_i}$ לכל $B\in C_i$

ומסה"כ $(C_i,\tilde{P},B)$

(יחד עם B התקניות) ← מנורמל

על C_i מוגדר X. פונק' הצפיפות הינה:

$$f_{X|C_i}(t)=\begin{cases}\frac{f_X(t)}{P_i} & t\in I_i\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נזכור ש $Y=\gamma\circ X$. נב"ח של הצמצום ל C_i

$Y_i=\gamma\circ X_i$, כאשר X_i הוא המ"מ X מצומצם ל C_i.

F_{Y_i} - יהי פונק' ההסתברות המצטברת של Y_i

מהי f_{Y_i}? $\quad f_{Y_i}(t)=\frac{f_X(\gamma^{-1}(t))}{P_i}\cdot\frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))}$

מהי לכן F_Y? f_Y?

$$F_Y(t)=P(Y\le t)=\sum_{i=1}^{n}P(Y\le t\mid \overset{x\in I_i}{C_i})\cdot P(C_i)=\sum_{i=1}^{n}P_{Y_i}(t)\cdot p_i$$

עת למצוא את f_Y, נגזור ונמצא.

$$f_Y(t)=\sum_{s\in\gamma^{-1}(t)}f_X(s)\frac{1}{|\gamma'(s)|}$$

תוחלת של מ"מ

תזכורת: נניח שX מ"מ בדיד, כלומר: קבוצה בת מנייה $a_1,a_2,\ldots$ כך ש

$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=a_i)=1$, והגדרנו $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i P(X=a_i)$

מ"מ רציף:

$(\Omega,P,\mathcal{B})$. נסמן בתור R_d את קבוצת המ"מ הבדידים על $(\Omega,P,\mathcal{B})$

$.E:R_d\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$

R_d^+ מ"מ בדידים חיוביים (אי-שליליים) $E:R_d^+\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

ולה יש את התכונות הבאות:

א (הומוגניות) אם $\alpha\geq 0$ $E(\alpha X)=\alpha E(X)$ ($E(\alpha X)=\alpha E(X)\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ א*)

ב (אדיטיביות) X,Y מ"מ כלשהו, אז $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

ג (מונוטוניות). אם לכל $\omega\in\Omega$ (או קבוצה בΩ שהסתברותה 1),

$X(\omega)\leq Y(\omega) \Longrightarrow E(X)\leq E(Y)$

ד אם לX,Y אותה התפלגות אז $E(X)=E(Y)$

ה $E(\mathbb{1}_A)=P(A)$

נניח שפונק' ψ המוגדרת על R_d^+ מקיימת (א), (ב), (ה)

$X=\frac{1}{2}\mathbb{1}_A \Longrightarrow \psi(X)=\frac{1}{2}P(A)$

$X=\frac{k}{\ell}\mathbb{1}_A \Longrightarrow \psi(X)=\frac{k}{\ell}P(A)$

נניח שX מקיים גם את (ג) (בנוסף ל(ב),(ה))

$X=\alpha\mathbb{1}_A \Longrightarrow \psi(X)=\alpha P(A)\quad \forall\alpha\geq 0$

אם X חסומה, ניתן לחסום אותה מלמטה ומלמעלה ע"י מ"מ דיסקרטיים Y_n המקבלים מס' סופי של ערכים. $Y_n\nearrow X$ אז $\lim\psi(Y_n)\leq\psi(X)$.

במקרה זה $\psi(X)$ מוגדרת לפי $E(X)$

נרחיב את E מR_d^+ לR_d באופן הבא: $X=\underset{\max(x,0)}{X_+}+\underset{\min(x,0)}{X_-}$

$E(X)=E(X_+)-E(-X_-)$

- כש$E(X)=\infty$ נאמר שהתוחלת של X אינה מוגדרת.
- תהי R קבוצת המ"מ המוגדרת על $(\Omega,P,\mathcal{B})$. נרצה להרחיב את תחום ההגדרה של E מהמ"מ הבדידים.

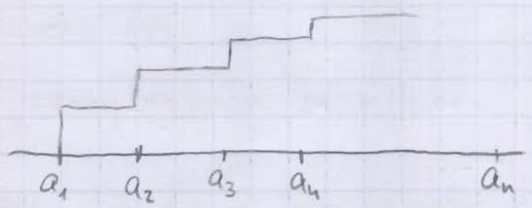
X אינו חיובי. $X = X_+ - X_-$

$E(X) = \sup_{\substack{Y \le X \\ Y \text{ דיסק}}} E(Y)$. $E(X) = E(X_+) - E(-X_-)$

3.12.08

הגדרת תוחלת למ"מ כלליים

X מ"מ בדיד. לצורך הפשטות נניח שX מקבל מס' ערכים סופי בהסתברות 1.
F_x היא פונק' מדרגות המקבלת מס' סופי של ערכים



$$E(x) = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_n P_n \qquad (P(x=P_i) = P_i)$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{0} F_x(t)dt + \int_{0}^{\infty} 1 - F_x(t)dt$$

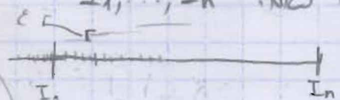
נזכר במשתנה המקרי X^*

$$E(X) \overset{def}{=} \int_0^1 X^*(q)dq = \int_{-\infty}^{0} F_x(t)dt + \int_0^{\infty} 1 - F_x(t)dt$$

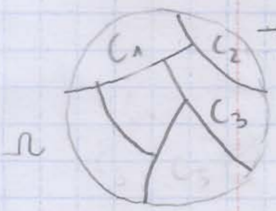
לX יש פונק' צפיפות f_x

טענה: כאשר יש f_x (צפיפות) אזי $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx$.

יהי X מ"מ. עבור כל $\varepsilon > 0$, נחלק את הישר בקטעים כאלה $I_1, \dots, I_n$



כך ש $P(X^{-1}(I_i)) < \varepsilon$ $\quad (C_i = X^{-1}(I_i))$



בנוסף כל קטע שאינו בקצוות נדאג שאורכו לא יהיה גדול.
נניח כי X_+ (החלק החיובי). באמצעות הדיסקרטיזציה הנ"ל נוכל
לקבל Y_ε ($\varepsilon = \frac{1}{n}$ ואז בעצם Y_ε יהיה סדרה)

$$Y_\varepsilon(\omega) = \inf_{t \in I_i} t \quad / \quad \omega \in C_i$$

קיבלנו מ"מ שבה $\omega \in C_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$ $\quad X(\omega) - Y_\varepsilon(\omega) \le \varepsilon$

$\varepsilon = 1/n$ $\quad . X \ge Y_{1/n}$ $\quad Y_{1/n}$ מתכנסים לX במובן הזה שבהסתברות
1: $Y_{1/n}(\omega) \to X(\omega)$

$$E(Y_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)\left(\min_{t \in I_i} t\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} f_x(x)dx \cdot \left(\min_{t \in I_i} t\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} f_x(x)dx \cdot \left(\min_{t \in I_i} t\right)}_{k} + \underbrace{\int_{I_n} f_x(x)dx \left(\min_{t \in I_i} t\right)}_{a}$$

$$(k) \le \sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} x f_x(x)dx \le \sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} \left(\max_{t \in I_i} t\right) f_x(x)dx \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} \left(\max_{t \in I_i} t + \varepsilon\right) f_x(x)dx \le \sum_{i=1}^{n-1} \int f_x(x)dx \left(\min_{t \in I_i} t + \varepsilon\right) =$$

$$=(1c)+\varepsilon\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\int_{I_i} f_x(x)dx}_{\le 1} = (1c)+\varepsilon$$

נביט על X_+ (כמו קודם) ונגדיר מ"מ חדש Z שמתלכד עם X_+ על $C_1\cup\dots\cup C_{n-1}$ וב-C_n הוא 0..

ע"פ האחרון ניתן לקבל את הנוסחה: $E(Z)=\int_{I_1\cup\dots\cup I_{n-1}} x f_x(x)dx$

קיבלנו שלכל מ"מ Z חסום עם אטום ב-0 $P(Z=0)$,

כך ש $Z=Z_1+Z_2$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\quad+\int_{0}^{\infty}$$

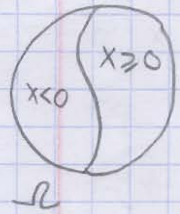
7.12.08

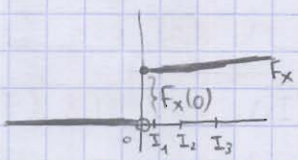
תוחלת

הגדרנו תוחלת של מ"מ להיות $E(X)=-\int_{-\infty}^{0}F_x(t)dt+\int_0^\infty 1-F_x(t)dt=$

$$=\int_0^1 X^*(t)dt$$

במקרה של X יש צפיפות f_x אזי: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x f_x(x)dx$





יהי X מ"מ. נחלק את $X=X^+ + X_-$

נביט על X^+

נקבע $\varepsilon>0$ ונרצה לבנות 2 מ"מ $X^\varepsilon_{min}, X^\varepsilon_{max}$ כך שלכל $\omega\in\Omega$

$$X^\varepsilon_{max}-X^\varepsilon_{min}\le\varepsilon \Longleftarrow X^\varepsilon_{min}\le X\le X^\varepsilon_{max}$$

הדרך לעשות זאת היא: (חשוב: ל-X יש צפיפות ולכן הבנייה)

נרצה לחלק את החלק החיובי של הישר לקטעים $I_1, I_2, \dots$ כך ש:

אורך של כל קטע אינו עולה על ε. $C_i=X^{-1}(I_i)$, לכל $\omega\in C_i$

$$X^\varepsilon_{min}(\omega)=\min_{t\in I_i} t = m_i$$

$$X^\varepsilon_{max}(\omega)=\max_{t\in I_i} t = M_i$$

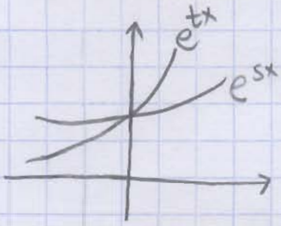
$X^\varepsilon_{min}\le X\le X^\varepsilon_{max}$ לכן, לכל t: $F_{X^\varepsilon_{max}}(t)\le F_x(t)\le F_{X^\varepsilon_{min}}(t)$

דיסקרטיים

הוא ע"פ הטענה כי: $X\le Y \Rightarrow$ $P(X\le t)\ge P(Y\le t)$ $F_X(t)\ge F_Y(t)$

$$E(X^\varepsilon_{min})=0\cdot F_x(0)+\sum_{i=1}^{\infty}P(C_i)\cdot m_i \qquad (1)$$

$$E(X^\varepsilon_{max})=0\cdot F_x(0)+\sum_{i=1}^{\infty}P(C_i)M_i \qquad (2)$$



נניח ש- $M_x(t)<\infty$, $t>0$, אזי לכל $0<s<t$, $M_x(s)<\infty$.

$$e^{sx} \le \max(1,e^{tx}) \le 1+e^{tx}$$

$M_x(t)<\infty$ עבור $t<0$ אזי לכל $t<s<0$ אז $M_x(s)<\infty$

(הוכחה דומה).

מסקנה: קבוצת הערכים t שעבורם $M_x(t)<\infty$ היא קטע.

$X\sim U(0,1)$ $\quad M_x(t)=\int_0^1 e^{tx}\cdot 1\,dx=\frac{e^{tx}}{t}\Big|_0^1=\frac{e^t-1}{t}$ לכל t.

ניקח את זה כטור $\quad \frac{1}{t}\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\dots-1\right)=\frac{1}{t}\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}\dots\right)=$

$E(X^n)=1/n \qquad 1+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\dots$

הסבר: מצד אחד $\quad M_t(x)=1+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\dots$

ומצד שני $\quad M_t(x)=1+tE(x)+\frac{t^2E(x^2)}{2!}+\frac{t^3E(X^3)}{3!}+\dots$

ולכן $\quad \frac{t^n}{(n+1)!}=\frac{t^nE(X^n)}{n!} \Rightarrow E(X^n)=\frac{1}{n+1}$

בפרט $E(X)=1/2$

10.12.08

פונק' היוצרת המומנטים

X מ"מ. $M_x(t)=E(e^{tx})$.

אומרים שהפונק' קיימת אם עבור קטע סביב 0. $M_n(t)$ היא סופי.

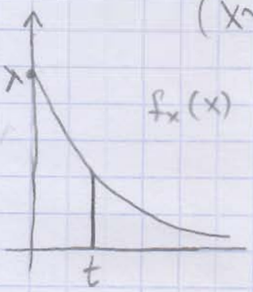
$$M_x(t)=1+tE(x)+\dots+\frac{t^n}{n!}E(x^n)$$

המומנט ה-n של X.

דוגמאות:

1. ל-X פונק' צפיפות מעריכית: $f_x(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\end{cases}$

זה פונק' הצפיפות של התפלגות מעריכית עם פרמטר $\lambda>0$ $(X\sim exp(\lambda))$



$$M_x(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_x(x)dx=\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\lambda\int e^{(t-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-t}\underbrace{\int(\lambda-t)e^{-(\lambda-t)x}dx}_{1}=\frac{\lambda}{\lambda-t} \qquad \lambda>t$$

לשם פשטות נניח $\lambda=1$. $\quad \frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\dots=1+tE(x)+\frac{t^2}{2!}E(x^2)+\dots$

לכן לכל n $\quad \frac{t^n}{n!}E(x^n)=t^n \Rightarrow E(X^n)=n!$

בפרט $E(X)=1$, $E(x^2)=2$

$$V(X) = E(X-E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1^2 = 1$$

$X \sim exp(\lambda)$:כנ

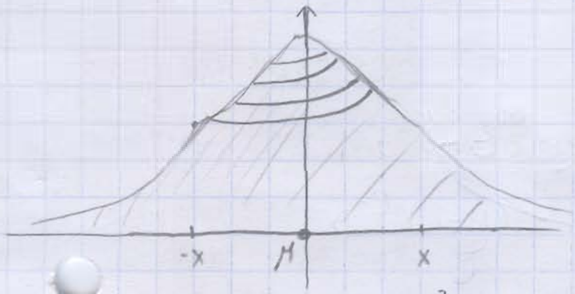
$$E(X^n) = \int_0^{\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \underset{\lambda x = y}{=} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda}\left(-ye^{-y} - e^{-y}\Big|_0^{\infty}\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

התפלגות נורמלית

נאמר של מפולג נורמלי אם ל X יש צפיפות מהטיפוס הבא (התלוי בשני הפרמטרים: μ, σ^2)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



נתחיל מהמקרה מיוחד שבו $\sigma=1$ ו $\mu=0$!

נשים לב שפונק' הצפיפות היא סימטרית סביב μ

כמו כן, היא עולה עד μ, ויורדת ממנו והלאה

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$ משתנה שלו צפיפות כזו נקרא נורמלי סטנדרטי

נסמן את השטח ב- I

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$y = r\sin\theta$
$x = r\cos\theta$
$r^2 = x^2 + y^2$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} |\ | \, d\theta dr = 1$$

r θ

$\frac{dx}{dx}$ dy

14.12.08

התפלגות נורמלית

נאמר X מתפלג נורמלית אם ל-X פונקציית צפיפות

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2>0$

מסמנים כך: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

X סימטרית סביב μ (כי $f(\mu-x)=f(\mu+x)$ לכל x).

נורמלי סטנדרטי הוא כאשר $\mu=0$ ו $\sigma^2=1$.

פונק' הצפיפות של מ"מ נורמלי סטנדרטי הוא $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

צ"ל להראות שזו אכן פונק' צפיפות, נגדיר $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \underset{\text{שינוי משתנים}}{=} \left\{\begin{array}{l} r^2=x^2+y^2 \\ x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right. \begin{vmatrix}\frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr}\\ \frac{dx}{d\theta} & \frac{dy}{d\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}\cdot r\,d\theta dr=$$

$$\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr=e^{-r^2/2}\Big]_0^{\infty}=-0-(-1)=1$$

$N(\mu,\sigma^2)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=$$

נסמן $y=\frac{x-\mu}{2}$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-y^2/2}\frac{dx}{dy}dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy=1$$

פונק' יוצרת המומנטים של $N(0,1)$

$X\sim N(0,1)$

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2-2tx}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2-2tx+t^2}{2}}\cdot e^{t^2/2}dx=$$

$$=e^{t^2/2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}dx}_{=1}=e^{t^2/2}$$

$$e^{t^2/2}=1+\left(\frac{t^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^3$$

המקדם של t^{2n} הוא $\frac{1}{n!2^n}$

$$M_X(t)=1+E(X)+\frac{1}{2!}E(X^2)+$$

$$\frac{E(X^{2n})}{(2n)!}=\frac{1}{n!\,2^n}$$

$$E(X^{2n})=\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n}=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

בפרט, $E(X^2)=1$ $\quad V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1$

* $X\sim N(0,1)$ $\quad E(X)=0$ $\quad V(X)=1$

כללי $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx}_{y=\frac{x-\mu}{\sigma}\qquad =0}+\mu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx}_{=1}=\mu$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 \qquad E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=$$

יש לעשות החלפת משתנים $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$

$$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

במקרה הכללי

כאשר $\mu=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t^2\sigma^2}{2}}{\sqrt{n}^2}\right)^n=e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

התפלגות משותפת של מ"מ

מ"מ ממשי, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ (מדיד, כלומר $X^{-1}(B)$ היא מדידה לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ בורל).

$(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ $\quad (\Omega,P,\mathcal{B})$

$P(X\le x, Y\le y)=F_{X,Y}(x,y)$

(אנחנו מצמצמים את הדיון למקרה שבו (X,Y) היא מדידה, כלומר

$(X,Y)^{-1}(B)$ תהיה מדידה ב-Ω, ב-$\mathcal{B}$, לכל קב' בורל B ב-$\mathbb{R}^2$).

תכונות F_X (חד מימדי)

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$$

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x)=1$$

$F_X(x)$ מונוטונית לא יורדת

$F_X(x)$ רציפה מימין

תכונות $F_{X,Y}$ מקרה הדו-מימדי:

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F_{X,Y}(x,y)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F_{X,Y}(x,y)=1$$

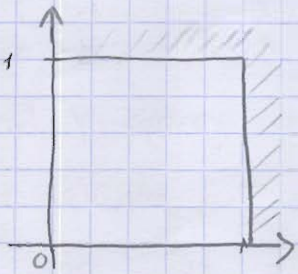
$x_1\geq x_2\ ,\ y_1\geq y_2 \Leftarrow$

$$F_{X,Y}(x_1,y_1)\geq F_{X,Y}(x_2,y_2)$$

$$\lim_{\substack{x\searrow x_0\\ y\searrow y_0}} F_{X,Y}(x,y)=F_{X,Y}(x_0,y_0)$$

דוגמה:

$F_{X,Y}(x,y)=$



נניח ש $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ כך ש $F_{X,Y}$ היא פונק' ההתפלגות המצטברת שלו.

נכ"ל X $\quad F_X(t)=P_X(t)=\lim_{s\to+\infty} F_{X,Y}(t,s)=1$

נאמר של (X,Y) יש צפיפות משותפת, אם קיימת פונ' $f_{X,Y}(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$

$$\int_a^b\int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = P(a\leq Y\leq b \text{ וגם } c\leq X\leq d)$$

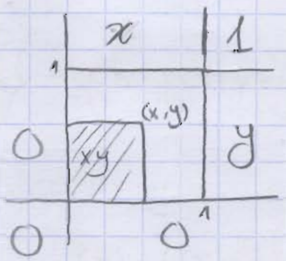
גם כאן לא תמיד (X,Y) שאין לו אטומים הוא בעל צפיפות.

דוגמה: $X\sim U(0,1)$ $\quad X=Y$

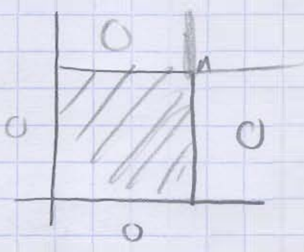
דוגמה:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} xy & 0\leq x,y\leq 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \text{ או } y<0\\ \vdots \end{cases}$$



$F_{X,Y}(x,y)$



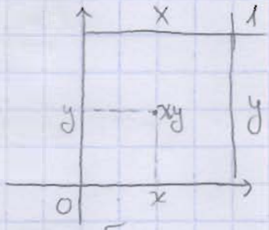
$f_{X,Y}(x,y)$

17.12.08

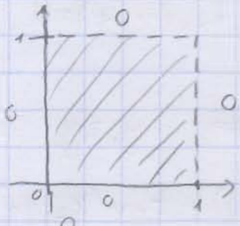
התפלגות משותפת של מ"מ

דוגמא 1: $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x,y\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ (הצפיפות המשותפת).

$F_{X,Y}(x,y)=xy$ כאשר $0\le x,y\le 1$



$F_{X,Y}$



$f_{X,Y}$

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0 & 0\ge y \text{ או } x\\ xy & 0\le x,y\le 1\\ y & 1<x,\ 0\le y\le 1\\ x & 1<y,\ 0\le x\le 1\\ 1 & 1<x,y\end{cases}$$

איך ניתן למצוא את התפלגותו של X, ושל Y בנפרד?

$f_{X,Y}(x,y)$ היא פונק' צפיפות משותפת. המשמעות היא שלכל קבוצה בורל B ב R^2

$P((X,Y)\in B)=\iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$, ובפרט אם $B=[a,b]\times[c,d]$ אז:

$$P((X,Y)\in B)=\int_a^b\int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

נביט על X

$$P(X\in[a,b])=\lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}P((X,Y)\in[a,b]\times[c,d])=$$

$$=\lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to+\infty}}\int_c^d\int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$\int_a^b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy}_{f_X(x)}\,dx$$

בדוגמא שלנו:

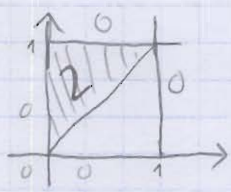
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\begin{cases}0 & x\notin[0,1]\\ 1 & x\in[0,1]\end{cases}$$

באופן דומה: $F_Y(x)=F_X(x)$, שים לב שבדוגמא זו:

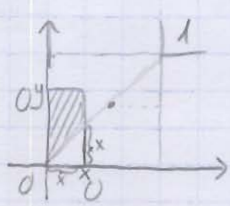
$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

2) דוגמא שנייה:

$f_{X,Y}(x,y)$



$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0 & 0\ge y \text{ או } x\\ 2xy-x^2 & 0\le x\le y\le 1\\ y^2 & 0\le y\le x\le 1\\ 2x-x^2 & y>1,\ 0\le x\le 1\\ 1 & 1<x,y\end{cases}$$



אדם f_X ! f_Y

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\begin{cases}0 & x\notin[0,1]\\ 2(1-x) & x\in[0,1]\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\begin{cases}0 & y\notin[0,1]\\ 2y & y\in[0,1]\end{cases}$$

3) דוגמה שלישית: $f_{X,Y}=\begin{cases}cxy & 0\le x,y\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

שאלות: *מהו c שהופך את $f_{X,Y}$ לפונק' צפיפות, *מהו $F_{X,Y}$, *אדם f_X, f_Y.

* $1=c\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy=\dots=\frac{1}{4}$ ולכן $c=4$

*נמצא את $F_{X,Y}$, $0\le x,y\le 1$

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4st\,ds\,dt=\int_0^x 4t\frac{s^2}{2}\Big|_0^y dt=$$

$$\int_0^x 2ty^2\,dt=2y^2\frac{t^2}{2}\Big|_0^x=y^2x^2$$

ולכן נסכם $F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0 & 0\ge y \text{ או } x\\ x^2y^2 & 0\le x,y\le 1\\ y^2 & 1\le x \quad 0\le y\le 1\\ x^2 & 1\le y\ ,\ 0\le x\le 1\\ 1 & 1\le x,y\end{cases}$

$f_X(x)=4\int_0^1 xy\,dy=2x$ כאשר $0\le x\le 1$

אחרת $f_X(x)=0$

מכאן: סימטריה $f_X(x)=f_Y(x)$

וגם כאן, נשים לב $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

מ"מ ב"ת

נאמר ש X,Y ב"ת אם לכל $a<b$! $c<d$ מתקיים:

$$P\left((X,Y)\in[a,b]\times[c,d]\right)=P(X\in[a,b])\cdot P(Y\in[c,d])$$

ניתן היה להגדיר גם כך: X,Y ב"ת אם $F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

נראה בפעם הבאה שאם X,Y ב"ת ויש להם צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$

אז $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

21.12.08

אי תלות של משתנים מקריים

X ו-Y מ"מ. נאמר שהם בת"ל אם לכל $a<b$ ו-$c<d$ מתקיים

$$P(a\le X\le b \text{ וגם } c\le Y\le d)=P(a\le X\le b)P(c\le Y\le d)$$

הגדרות שקולות:

① לכל b,d: $P(X\le b \text{ וגם } Y\le d)=P(X\le b)P(Y\le d)$

② לכל 2 קבוצות בורל ב-$\mathbb{R}$: B_1,B_2 $\quad P(X\in B_1 \text{ וגם } Y\in B_2)=P(X\in B_1)P(X\in B_2)$

תזכורת: נתון $(\Omega,P,\mathcal{B})$. X הוא מ"מ אם $X^{-1}(B)$ היא קבוצה ב-$\mathcal{B}$ לכל קבוצת בורל B ב-$\mathbb{R}$.

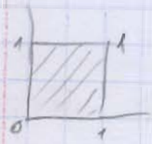
$X:\Omega\to\mathbb{R}$. מהו ה-σ שדה הקטן ביותר ש-X הוא מדיד בהתייחסות אליו?

לσ שדה זה, קוראים ה-σ שדה שנוצר ע"י X, והוא מסומן $\sigma(X)$.

בσ שדה זה יהיו בפרט כל הקבוצות מהצורה $X^{-1}(-\infty,a)$.

כידוע לנו שדה בורל של $\mathbb{R}$ נוצר ע"י קבוצות מהצורה $(-\infty,a)$.

לכן, אם $\mathcal{F}$ מכיל את כל הקבוצות מהצורה $X^{-1}(-\infty,a)$ הוא יכיל גם את כל הקבוצות מהצורה $X^{-1}(B)$, B בורל ב-$\mathbb{R}$. ($\mathcal{F}$ - σ שדה).



דוגמה: $A\subseteq\Omega$, $X=\mathbb{1}_A$, $\sigma(X)=\{\phi,\Omega,A,A^c\}$.

שאלה: $\Omega=[0,1]^2$, $X(\omega_1,\omega_2)=\omega_1$, מהו $\sigma(X)$?

$$\sigma(X)=\{B\times I \;/\; I=[0,1],\ B \text{ בורל בקטע } [0,1]\}$$

הגדרה: יהי (Ω,P) מ"ה, יהיו $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ σ שדות ב-Ω.

$\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ בת"ל אם לכל $A\in\mathcal{F}_1$, $B\in\mathcal{F}_2$, מתקיים: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

(שים לב שאי-תלות קשורה ב-P.)

הגדרה: X ו-Y בת"ל אם $\sigma(X)$ ו-$\sigma(Y)$ הם בת"ל (כתתי σ-שדה)

תרגיל: נניח ל-(X,Y) יש צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$, ונניח בנוסף ש-X ו-Y הם בת"ל, אז: $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

הוכחה: יהיו b,d מספרים:

$$P(X\le b, Y\le d)=\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

בגלל האי-תלות

$$P(X\le b, Y\le d)=P(X\le b)P(Y\le d)=\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{d} f_Y(y)\,dy=$$

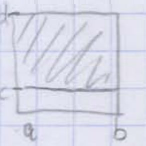
נגזור ב-$f_X(x)$

$$= \int_{-\infty}^{b} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx}_{k} \cdot \int_{-\infty}^{d} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}_{ב}$$

$$k = \int_{-\infty}^{d} f_{X,Y}(x,y)\,dy + \int_{d}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$ב = \int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dx + \int_{b}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

תזכורת: אינטגרל כפול



$$\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_{c}^{d} \Big[\underbrace{\int_{a}^{b} \varphi(x,y)\,dx}_{\psi(y)} \Big]\,dy$$

$$P(-\infty \le X \le b, -\infty \le Y \le d) = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

X,Y ב"ת $\|$

$$P(-\infty \le X \le b)\,P(-\infty \le Y \le d) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx \cdot \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{d} f_Y(y)\,dy}_{קבוע} \Big] =$$

$$= \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f_Y(y)\,dy \cdot \underbrace{f_X(x)\,dx}_{קבוע} = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f_X(x) f_Y(y)\,dy\,dx$$

קיבלנו שלכל b,d

$$\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f_X(x) f_Y(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

נסמן: $\varphi(x,y) = f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

קיבלנו ש: $\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{d} \varphi(x,y)\,dy\,dx = 0$, לכן $f_X(x)f_Y(y)$ היא פונק' צפיפות של (X,Y).

הערות: ⊛ שים לב שאת ההגדרה השקולה מס 1, ניתן לרשום גם כך: X,Y בת"ל אם $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ לכל x ו y.

⊛ נזכר בדוגמאות קודמות: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{בריבוע } [0,1]^2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, $F_X(x) = F_Y(y) = t$

$$F_{X,Y}(s,t) = F_X(s)F_Y(t) = st$$

דוגמה נוספת: $X,Y \sim exp(\lambda)$ נתון שהצפיפות המשותפת היא

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 e^{-\lambda(x+y)} & x,y \ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

סדרות של מ"מ

$X_1, X_2, \dots$ סדרה של מ"מ

אי תלות: (Ω, P), $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ σ שדות (נאמר שהם בת"ל אם לכל

$A_i \in \mathcal{F}_i$ $(i=1,\dots,n)$ $A_1,\dots,A_n$ בת"ל

הגדרה: $X_1, X_2, \dots$ היא סדרת מ"מ בת"ל אם לכל n: $\sigma(X_1),\dots,\sigma(X_n)$ הם בת"ל

סוגי התכנסות של מ"מ

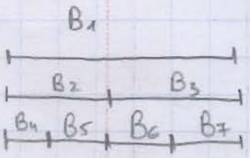
3 סוגי התכנסות, מתוכם 2 פורמליים של המ"מ יוגדרו על אותו Ω.

(א) התכנסות בהסתברות: (נאמר ש $X_1,X_2,\dots$ מתכנסת בהסתברות ל X

אם לכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n>N$ $P(|X_n-X|>\varepsilon)<\varepsilon$

הגדרה שקולה: נקבע ε, אזי (נגדיר סדרה $A_n=\{|X_n-X|>\varepsilon\}$ ואז $\lim_{n\to\infty} P(A_n)=0$

דוגמה: (נגדיר מאורעות B_n כבציור 1 $X_n=\mathbb{1}_{B_n}$, $\Omega=[0,1]$, $P=\lambda$



$\{X_n\}$ שואפת בהסתברות ל-0. נניח ש $\varepsilon=1/2$, אזי

$$\underset{\text{שאורכו הולך ל-0}}{A_n}=\{|X_n|>1/2\}=B_n$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0$$

24.12.08 (ב) התכנסות כמעט בכל מקום (כמעט תמיד): (נאמר ש $X_1,X_2,\dots$ מתכנסת

כמעט בכל מקום ל-X אם $1=P(\{\omega / X_n(\omega)\to X(\omega)\})$. סימון $X_n \xrightarrow{a.s} X$

נוכיח בהמשך שאם $X_n\xrightarrow{a.s}X$ אזי $X_n \xrightarrow{P} X$

הערה: חוק המספרים הגדולים. חלש (התכנסות בהסתברות) וחזק (התכנסות a.s).

הלמה של בורל קנטלי (חלק I)

נתונה סדרת מאורעות $A_1,A_2,\dots$, אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty$ אזי

$P(\overline{\lim}\, A_n)=0$ (תזכורת $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} A_l$)

במונחים של מ"מ הלמה אומרת: יהי $X_n=\mathbb{1}_{A_n}$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty$ אזי $X_n\xrightarrow{a.s}0$

הוכחה: $\overline{\lim}\, A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l$. (נגדיר $B_k=\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l$, $B_1\supseteq B_2\supseteq\cdots$

$P(\overline{\lim}\, A_n)=\lim_{k\to\infty}P(B_k)$.

$$P(B_k)=P\Big(\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l\Big)\le \overbrace{\sum_{l=k}^{\infty} P(A_l)}^{\text{זנב של טור מתכנס}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\Leftarrow \lim_{k\to\infty}P(B_k)=0$ ומכאן המבוקש.

הכיוון ההפוך (ללמה של קנטלי) אינו נכון.

דוגמה (נגדיר: $\Omega=[0,1]$, $A_n=[0,1/n]$. $P=\lambda$ $\overline{\lim}\, A_n=\{0\}$

למה של בורל קנטלי (חלק II)

נניח כי $A_1, A_2, \dots$ היא סדרה של מאורעות בת"ל ($A_1, \dots, A_n$ בת"ל לכל n).

אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ אזי $P(\limsup A_n) = 0$. אם לא, נגדיר סדרת

מ"מ $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$. לפי ההנחה $X_1, X_2, \dots$ בת"ל. אינדיקטור $\leftarrow$ $S_n = \sum_{n=1}^{N} X_n$ $\leftarrow$ סופר כמה קבוצות

אם (במשלים) $\limsup A_n$ הוא מאורע בהסתברות חיובית, אזי יש מאורע

שהסתברותו חיובית $S_n \to \infty$.

X, Y מ"מ המוגדרת על (Ω, P). תהי φ פונק' מדידה מ $\mathbb{R}^2$ ל $\mathbb{R}$

(כלומר $\varphi^{-1}(B)$ היא בורל ב$\mathbb{R}^2$ לכל B בורל ב$\mathbb{R}$)

$\varphi(X, Y)$ מ"מ. מה תוחלתו?

אם ל(X,Y) יש צפיפות משותפת $f_{X,Y}$.

$$E(\varphi(X,Y)) = \iint \varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

מכפלות

X, Y מ"מ בת"ל. נסתכל על $\varphi(X,Y) = XY$

סכε, ניקח Y^{ε} דיסקרטי קרוב ל Y (שמוגדר באמצעות Y)

$\sigma(Y^{\varepsilon}) \subseteq \sigma(Y)$ (σ = σ שדה שנוצר ע"י המ"מ), לכן X, Y^{ε} בת"ל.

$$E(Y^{\varepsilon} \cdot X) = E(Y^{\varepsilon}) E(X)$$

ולכן

$$E(YX) = E(Y) E(X)$$

31.12.08

החלק השני של הלמה של בורל-קנטלי

אם $A_1,\dots,A_n,\dots$ הם מאורעות ב"ת ו $P(\limsup A_n)=0$ אז $\sum P(A_n)<\infty$

ניזכר בכמה עובדות:

- אם X,Y ב"ת $E(XY)=E(X)E(Y)$

- אם X,Y,Z הם ב"ת אז XY ו Z הם ב"ת

(X,Y,Z ב"ת משמעו ש $\underset{A_X}{\sigma(X)},\underset{A_Y}{\sigma(Y)},\underset{A_Z}{\sigma(Z)}$ הם ב"ת.

$$P(A_X\cap A_Y\cap A_Z)=P(A_X)P(A_Y)P(A_Z)$$

יש להראות ש $\sigma(XY)$ ו $\sigma(Z)$ הם ב"ת.

כלומר ש $A\in\sigma(XY)$ ו $B\in\sigma(Z)$ הם ב"ת.

זה נכון, כי $\sigma(XY)$ מוכל ב σ שהיא שנוצר ע"י $\sigma(X)$ ו $\sigma(Y)$.

<u>מסקנה</u>: אם $X_1,\dots,X_n$ הם ב"ת אז $E(X_1\cdots X_n)=E(X_1)\cdots E(X_n)$

א"ש מרקוב

נניח $X>0$ (מ"מ) ו $a>0$ אז $P(X\ge a)\cdot a\le E(X)$

הסבר: נגדיר Y באופן הבא $Y=\begin{cases}0 & X<a\\ a & X\ge a\end{cases}$. ולכן $Y\le X$

$$E(Y)\le E(X)\qquad (E(Y)=P(X\ge a)\cdot a)$$

הוכחה: נגדיר $X_n=\mathbb{1}_{A_n}$ (ב"ת). לכן $e^{-X_1},\dots,e^{-X_n}$ אלו הם מ"מ ב"ת (כי אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת אז גם $f_1(X_1),\dots,f_n(X_n)$ הם ב"ת כאשר $f_1,\dots,f_n$ הן פונק' מדידות.

$$E(e^{-(X_1+\dots+X_n)})=E(e^{-X_1}e^{-X_2}\cdots e^{-X_n})\underset{ב"ת}{=}\prod_{i=1}^n E(e^{-X_i})=$$

$$=\prod_{i=1}^n\left(1-P_i\left(1-\frac1e\right)\right)$$

$$E(e^{-X_i})=(1-P_i)+\frac{P_i}{e}=1-P_i\left(1-\frac1e\right)\longrightarrow 0$$ אבל $\left(1-\frac1e\right)\sum_{i=1}^\infty P_i=\infty$

$$\prod_{i=1}^n(1-\alpha_i)\xrightarrow{n\to\infty}0\iff\sum_{i=1}^\infty\alpha_i=\infty$$

נניח בשלילה ש $\sum_{i=1}^\infty P_i=\infty$ ונקבל $E(e^{-(X_1+\dots+X_n)})\xrightarrow{n\to\infty}0$

נקבע n ונבחר מס' גדול M. לפי א"ש מרקוב:

$$P(e^{-(X_1+\dots+X_n)}\ge e^{-M})e^{-M}\le E(e^{-(X_1+\dots+X_n)})$$

$$P(\;''\;)\le e^{M}E(e^{-(X_1+\dots+X_n)})$$

$$P(X_1+\dots+X_n \le M) \le e^{M} E\left(e^{-(X_1+\dots+X_n)}\right)$$

נקבע את M ונשאיף את n לאינסוף.

$$P(X_1+\dots+X_n \le M) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

זה נכון עבור כל M.

מה המשמעות לגבי $\limsup A_n$? $\limsup A_n = \{\omega \,/\, X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega) \not\xrightarrow{n\to\infty} \infty\}$

קיבלנו ש $X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega) \to \infty$ כמעט תמיד

עוד דרך להסתכל על זה: $S_n \xrightarrow{a.s} \infty$ $\quad S_n = X_1+\dots+X_n$

$$B_{n,M} = \{S_n \le M\}$$

$$B_{\infty,M} = \{\lim S_n \le M\} \qquad P(B_{\infty,M}) = 0$$

$$P(X_1(\omega)+\dots+X_n(\omega) \longrightarrow \infty) = P\left(\bigcap_M B_{\infty,M}^{\,c}\right) = 1$$

4.1.09

חוק המספרים הגדולים

החוק החלש: התכנסות בהסתברות

החוק החזק: התכנסות כמעט בכל מקום

יהי $X_1, X_2, \dots$ סדרת מ"מ ש"ה, נרצה להבטיח שהממוצע ישאף לתוחלת. $\quad \overline{X_n} = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$

2 גרסאות של החוק החלש של המספרים הגדולים

גרסה א': $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ש"ה עם תוחלת μ ושונות σ^2. אם הם בלתי מתואמים (כלומר $E(X_i \cdot X_j) = E(X_i)E(X_j)$ לכל $i \ne j$) אז $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu$

גרסה ב': אם $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ש"ה ובת"ל אז $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \mu$

הערות: (א) אם X, Y בת"ל אז הם בלתי-מתואמים

(ב) ההיפך לא נכון

(ג) נניח כי $X_1, \dots, X_n$ עם בת"ל וש"ה עם תוחלת μ, אז $E(\overline{X_n}) = \mu$ ויתר על כן

$$V(\overline{X_n}) = E(|\overline{X_n} - \mu|^2) = E\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right]^2\right) =$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{1\le i,j\le n}\left(E[(X_i-\mu)(X_j-\mu)]\right)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\,V(X_i) = \frac{V(X_i)}{n}$$

נזכר באי"ש מרקוב: אם $X \ge 0$ (כמעט תמיד) אז לכל $a>0$ $\quad P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}$

נזכר באי"ש צ'בישב: נשתמש באי"ש מרקוב עבור $X = (Y-\mu)^2$, $a = \varepsilon^2$

$$P((Y-\mu)^2 \ge \varepsilon^2) \le \frac{E((Y-\mu)^2)}{\varepsilon^2}$$

במילים אחרות: אי"ש צ'בישב: יהי Y מ"מ עם תוחלת μ ושונות $V(Y)$, אז:

$$P(|Y-\mu| \ge \varepsilon) \le \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$$

הוכחת הגרסה הראשונה

רוצים להוכיח ש $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$, לפי א"ש צ'בישב (המיושם ל-$\overline{X}_n$):

עבור כל $\varepsilon>0$ $\quad P(|\overline{X}_n-\mu|\geq\varepsilon)\leq \frac{V(X_i)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ולכן $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

הערה נניח ש $|E(X)|<\infty$, כלומר: $E(X)=E(X_+)-E(X_-)<\infty$ ולכן $|E(X)|<\infty$

נבנה סכום ל X_+: $\quad E(X_+)<\infty \to E(X_+ +1)<\infty$

נסמן $\quad Y=[X_+]+1 \to Y\leq X_+ +1 \to E(Y)\leq E(X_+)+1<\infty$

זהו טור מתכנס ולכן זנבו $\to 0$ $\quad E(Y)=\sum_{n=1}^{\infty} nP(n-1\leq X<n)<\infty$

ניקח M מס' גדול, נסמן $\quad X_+=W+R\ ,\quad W=X_+\cdot 1_{\{X_+\leq M\}}\ ,\ R=X_+\cdot 1_{\{X_+>M\}}$

$E(R)\xrightarrow[M\to\infty]{}0 \quad , \quad$ חסום $W \Longrightarrow V(\omega)<\infty$

הוכחת הגרסה השניה

ניקח $\varepsilon>0$, נוכל למצוא M מספיק גדול כך ש $X=W+R$, W חסום ו $E(|R|)<\varepsilon$

באמצעות M זה נגדיר לכל X_n את הפירוק המתאים $\quad X_n=W_n+R_n$

$$|\overline{X}_n-\mu|=\left|\frac{(W_1+R_1)+\dots+(W_n+R_n)}{n}-\mu\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{W_i-\mu}{n}\right|+\sum_{i=1}^{n}\frac{|R_i|}{n}$$

נשים לב לשתי נקודות:

א. $E(|R_i|)<\varepsilon$ ולכן $E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|R_i|}{n}\right)<\varepsilon$

ב. $\omega_1,\omega_2,\dots$ הם מ"מ ב"ת.

יתר-על כן: $|E(W_n)-E(X_n)|<\varepsilon$. נסמן $E(W_n)=\mu_n$

ניקח תוחלת של שני האגפים:

$$E(|\overline{X}_n-\mu|)\leq E|\overline{W}_n-\mu|+\sum_{i=1}^{n}\frac{E|R_i|}{n}\leq$$

$(\mu'=\mu)$

$$\leq E|\overline{W}_n-\mu'|+|\mu'-\mu|+\sum_{i=1}^{n}\frac{E|R_i|}{n}$$

(תרגיל: $\omega_1,\omega_2,\dots$ הם מ"מ ב"ת שוה חסומים עם תוחלת μ' , אזי $E|\overline{W}_n-\mu'|\xrightarrow{n\to\infty}0$

כאשר n מספיק גדול $\quad E|\overline{X}_n-\mu|\leq 3\varepsilon$

$$P(|\overline{X}_n-\mu|\geq\delta)\leq\frac{E(|\overline{X}_n-\mu|)}{\delta}$$

החוק החזק של המספרים הגדולים

אם $X_1,X_2,\dots$ מ"מ שוה ב"ת עם תוחלת μ אזי $\overline{X}_n\xrightarrow{a.s}\mu$

(החוק החזק גורר את הגרסה השניה של החוק החלש).

ההוכחה כרוכה ב 3 שלבים.

① אי"ש קולמוגורוב

יהי $X_1,X_2,\dots$ סדרה סופית של מ"מ ב"ת עם שונות סופית ותוחלת 0 .

נגדיר $S_k=X_1+\dots+X_k$ $(k=1,\dots,n)$ אזי:

$$P(\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge\varepsilon) \le \frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2}$$

② משפט: יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ בת"ל עם תוחלת 0. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$, אזי

S_n מתכנסת a.s

③ הוכחת א"ש קולמוגורוב

נניח $n\ge 1$, ונגדיר לכל $j<k$: $A_k=\begin{cases}|S_k|\ge\varepsilon\\|S_j|<\varepsilon\end{cases}$. שים לב שלכן $A_1,\ldots,A_n$ זרים.

כמו-כן, A_k מוגדר באמצעות $X_1,\ldots,X_k$ ולכן X_{k+1} ו $\mathbb{1}_{A_k}$ בת"ל.

X_n ו $\mathbb{1}_{A_{n-1}}$ בת"ל

$$\{\max_{1\le k\le n}|S_n|\ge\varepsilon\}=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

$$E(S_n^2)\overset{1}{\ge}\sum_{k=1}^{n}E(S_n^2\mathbb{1}_{A_k})=$$

1 למה זה לא שוויון? אבל אני לא לוקח בחשבון את התוחלת של S_n^2 על $(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)^c$

$$\overset{2}{=}\sum_{k=1}^{n}E\left[\left(S_k^2+2S_k(S_n-S_k)+(S_n-S_k)^2\right)\mathbb{1}_{A_k}\right]\ge$$

2 מפתח ש $S_n^2=(S_k+(S_n-S_k))^2$

$$\overset{3}{\ge}\sum_{k=1}^{n}E\left[S_k^2+2S_k(S_n-S_k)\right]=$$

3 כי השמטנו $0\le E((S_n-S_k)^2\mathbb{1}_{A_k})$

$$\overset{4}{=}\sum_{k=1}^{n}E(S_k^2\mathbb{1}_{A_k})$$

4 מדוע? $\sum X_{k+1}$

7.1.09

המשך ... (הוכחת אי קולמוגורוב)

$$E(S_n^2) \geq \cdots \geq \sum_{k=1}^{n} E\left[(S_k^2 + 2S_n(S_n - S_k)) \mathbb{1}_{A_k} \right] \overset{④}{=} \sum E(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2 P(A_k) = \varepsilon^2 P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon)$$

$\underline{4}$ הסיבה לשוויון זה:

$$E\left[\mathbb{1}_{A_k} S_k (S_n - S_k)\right] \qquad \mathbb{1}_{A_k} \quad S_k \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$$

$$(X_{k+1} + \dots + X_n) \in \sigma(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

$E(\mathbb{1}_{A_k} \cdot S_k(S_n - S_k)) = E(\mathbb{1}_{A_k}) \cdot E(S_k(S_n - S_k)) =$ כ $\Leftarrow$ מ"א אלה הם ב"ת

$= E(X_{k+1}) + \dots + E(X_n)$

שלב ב'

משפט: תהי $X_1, X_2, \dots$ סדרת מ"א ב"ת עם תוחלת 0. אם $\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$,

אזי S_n מתכנס כמעט-תמיד.

דוגמה לשימוש במשפט זה: נניח $X_1, X_2, \dots$ שה"ה עם שונות סופית $\Leftarrow E(X_1) = 0$

(נניח עכשיו) $Y_n = \frac{X_n}{n}$ ונגדיר $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{1}{n^2} V(X_1) \longrightarrow \sum V(Y_n) < \infty$$

ומכאן ש-S_n מתכנס כ.ת.

הלמה של קרונקר: תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים ו-$\{b_n\}$ סדרה עולה ל-∞.

אם $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}$ מתכנסת (כאשר $n \to +\infty$) אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{b_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

בדוגמה הקודמת $S_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n}$. $\omega \in \Omega$

$$S_n(\omega) = \underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{X_1(\omega)}} + \underset{\frac{a_2}{2}}{\underset{\shortparallel}{\frac{X_2(\omega)}{2}}} + \dots + \underset{\frac{a_n}{n}}{\underset{\shortparallel}{\frac{X_n(\omega)}{n}}} \qquad (a_i = X_i(\omega),\ b_i = i)$$

בדוגמה אנחנו מקבלים מהלמה של קרונקר ש: $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow 0$ כ.ת.

מסקנה: (גירסה של החוק החזק של המס' הגדולים)

אם $X_1, X_2, \dots$ מ"א שה"ה ב"ת עם תוחלת 0, אזי $\overline{X_n} \longrightarrow 0$ כ.ת.

כאשר השונות של X_i <u>סופית</u>.

מסקנה: (חוק חזק של המס' הגדולים עם שונות סופית)

$X_1, X_2, \dots$ מ"א ב"ת שה"ה עם שונות סופית. (נסמן $\mu = E(X_1)$, אזי $\overline{X_n} \to \mu$ כ.ת.

הוכחה: (נסמן $Y_n = X_n - \mu$, אלה מקיימים את תנאי המסקנה הקודמת.

הוכחת המשפט: נראה שכמעט תמיד הסדרה $S_n(\omega)$ היא סדרת קושי. $S_n(\omega)$ היא סדרת קושי אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ רציונלי קיים n כך ש: $\sup_{j,k\ge n}|S_j(\omega)-S_k(\omega)|<\varepsilon$

נגדיר את המאורעות הבאים: $\varepsilon>0$

$$B_{n,\varepsilon}=\{\omega \mid \sup_{j,k\ge n}|S_j(\omega)-S_k(\omega)|\ge\varepsilon\}$$

$$C_{n,\varepsilon}=\{\sup_{k\ge 1}|S_{n+k}-S_k|\ge \varepsilon/2\}$$

נשים לב ש $B_{n,\varepsilon}\subseteq C_{n,\varepsilon}$. מתקיים $|S_j(\omega)-S_k(\omega)|\ge\varepsilon$

בנוסף מתקיים או $|S_j(\omega)-S_n(\omega)|\ge\varepsilon/2$ או $|S_k(\omega)-S_n(\omega)|\ge\varepsilon/2$

$S_n(\omega)$ היא לא סדרת קושי אמ"מ $\omega\in\bigcup_{\varepsilon>0 \text{ רציונלי}}\bigcap_n B_{n,\varepsilon}\subseteq\bigcup_{\varepsilon>0 \text{ רציונלי}}\bigcap_n C_{n,\varepsilon}$

מספיק, אם כן, להראות שלכל $\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty}P(\sup|S_{n+k}-S_n|\ge\varepsilon/2)=0$

נשתמש באי"ש קולמוגורוב ונקבל:

$$P(\max_{1\le k\le r}|S_{n+k}-S_n|\ge\varepsilon/2)\le\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{r}V(X_{n+k})$$ לכל r.

הא"ש הקודם נכון לכל r, ולכן $P(\sup_{k\ge 1}|S_{n+k}-S_n|\ge\varepsilon/2)\le\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}V(X_{n+k})$

נשים לב שאגף ימין הוא זנב של טור מתכנס ולכן שואף ל-0 עם n.

11.1.09

נס"ח את הוכחת החוק החזק של המספרים הגדולים, כאשר למשתנים המקריים
לא קיים בהכרח המומנט השני.

הראינו עד כה שאם $X_1,X_2,\dots$ הם מ"מ ב"ת כך ש-$\sum V(X_n)<\infty$ אזי
$\sum (X_n-\mu_n)$ מתכנס כאשר μ_n היא התוחלת של X_n.
בפרט אם $\sum \mu_n<\infty$, אזי $S_n=\sum^{n} X_i$ מתכנס כ.ת.

דוגמאות

(א) נניח $X_1,X_2,\dots$ הם מ"מ נורמליים ב"ת כך ש-$V(X_n)=\frac{1}{n^2}$, $E(X_n)=\frac{1}{n^2}$
נביט על $S_n=X_1+\dots+X_n$, תוחלת $E(S_n)=1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$ והוא מתכנס.
$S_n=X_1+\dots+X_n$. $V(S_n)=1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$ וגם הוא מתכנס כאשר $n\to\infty$
לכן S_n מתכנס כ.ת.

(ב) נניח כי $X_1,X_2,\dots$ מ"מ ב"ת המתפלגים באופן אחיד $X_n\sim U(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

$E(X_n)=0$ ⇐ $V(X_n)=E(X_n^2)=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2\cdot\frac{n}{2}\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1/n}^{1/n}\cdot\frac{n}{2}=$

$\frac{1}{n^2}\cdot$ קבוע ~ ולכן $\sum V(X_n)<\infty$

דרך אחרת לראות זאת: $Y_n\sim B(\frac{1}{2})$, שונות של מ"מ ברנולי הוא $p(1-p)$
$V(Y_n)=\frac{1}{4}$. נגדיר $Z_n=\frac{2}{n}Y_n$. ומכאן נגדיר $Z_n-\frac{1}{n}$, זהו מ"מ
שמקבל $\frac{1}{n}$ ו-$-\frac{1}{n}$ בהסתברות $\frac12$ כל אחד.

$V(X_n)\le V(Z_n-\frac{1}{n})=V(Z_n)=\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}$

$V(X_n)=E(X_n-\mu_n)^2\le E(Z_n-\frac{1}{n})^2$

⇐ S_n מתכנס כ.ת.

הוכחת המשפט (כאשר לא בהכרח קיים המומנט השני)

תהי $X_1,X_2,\dots$ סדרת מ"מ ב"ת שה"ה עם תוחלת סופית ($E|X_1|<\infty$)
נוכיח ש-$\overline{X_n}\xrightarrow{\text{כ.ת}}\mu$ (סדרת הממוצעים).
נגדיר לכל n מ"מ Y_n.

$$Y_n=\begin{cases}X_n & |X_n|\le n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

במילים אחרות $C_n=\{|X_n|\le n\}$, $Y_n=X_n\mathbb{1}_{C_n}$

טענה: נסמן $A_n=\{Y_n\ne X_n\}$ ($A_n=C_n^c$), אזי $P(A_n\ i.o)=0$

הוכחת הטענה: $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(|X_1|>k)\le\sum_{k=1}^{\infty}P(|X_1|\ge k)\le E(|X_1|)<\infty$

הסיבה לכך: נגדיר $Z=[|X_1|]$, $E(Z)\le E(|X_1|)$

$E(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(Z=k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(Z\ge k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(|X_1|\ge k)$

לכן לפי החלק ה-1 של הלמה של בורל-קנטלי $P(A_n\ i.o)=0$

מסקנה: בהסתברות 1 $X_n=Y_n$ החל מ-n מספיק גדול.

מהי המשמעות לגבי ההבדל בין $\bar{X}_n$ ו־ $\bar{Y}_n$? $|\bar{X}_n - \bar{Y}_n| \longrightarrow 0$

שים לב ש $|E(X_n)-E(Y_n)| \rightarrow 0$ (מכיוון ש $|E(X_n)-E(Y_n)| = |E(X_n \mathbb{1}_{A_n})|$

$$|E(X_n \mathbb{1}_{A_n})| \le E(|X_n| \mathbb{1}_{A_n}) \le \underbrace{\sum_{k=n-1}^{\infty} P(X \ge k)}_{\text{זנב של טור מתכנס}}$$

$$Z \le |X_1| \le Z+1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 \ge k) \le E(|X_1|) \le \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 \ge k) + 1$$

מסקנה: אם נסמן $E(Y_n) = \mu_n$ אזי $\frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n} \longrightarrow E(X_1) = \mu$

יהיה מספיק להראות ש $\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_i)}{n}$ מתכנס כ.ת.

ידוע לנו כי לכל מ"מ Z $V(Z) \le E(Z^2)$. נביט על $Y_1 + \frac{Y_2}{2} + \cdots + \frac{Y_k}{k}$

$$V\left(Y_1 + \frac{Y_2}{2} + \cdots + \frac{Y_k}{k}\right) \overset{1}{=} V(Y_1) + V\left(\frac{Y_2}{2}\right) + \cdots + V\left(\frac{Y_k}{k}\right) =$$

$$= V(Y_1) + \frac{V(Y_2)}{2^2} + \cdots + \frac{V(Y_k)}{k^2} \le \sum_{n=1}^{k} \frac{E(Y_n^2)}{n^2} =$$

$$\overset{2}{=} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} E\left(Y_n^2 \mathbb{1}_{\{j < |Y_n| \le j+1\}}\right) \overset{3}{=}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=1}^{j+1} \frac{1}{n^2} E\left(Y_n^2 \mathbb{1}_{\{j < |Y_n| \le j+1\}}\right) \overset{4}{\le}$$

$$\le \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=j+1}^{k} \frac{1}{n^2} E\left(X_1^2 \mathbb{1}_{\{j < |X_1| \le j+1\}}\right) \overset{5}{\le}$$

$$\le \sum_{j=0}^{k-1} E\left(X_1^2 \mathbb{1}_{\{j < |X_1| \le j+1\}}\right) \cdot \frac{C}{j} \le$$

$$\le C \cdot \sum_{j=0}^{k-1} E\left(\frac{X_1^2}{j+1} \mathbb{1}_{\{j < |X_1| \le j+1\}}\right) + E\left(X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| \le 1\}}\right) \overset{6}{\le}$$

$$\le C' \sum_{j=1}^{k} E\left(|X_1| \mathbb{1}_{\{j < |X_1| \le j+1\}}\right) + 1 \overset{7}{\le}$$

$$\le C' E(|X_1|) + 1 < \infty$$

הסברים למעברים:

(1) $Y_1, Y_2, \ldots$ ב"ת

(2)

$$E(Y_n^2) = E\left(Y_n^2 \mathbb{1}_{\{0 < |Y_n| \le 1\}}\right) + \cdots + E\left(Y_n^2 \mathbb{1}_{\{n-1 < |Y_n| \le n\}}\right)$$

(3) החלפת סדר הסכימה.

(4)

$$E\left(Y_n^2 \mathbb{1}_{\{\ \}}\right) \le E\left(X_n^2 \mathbb{1}_{\{\ \}}\right) \overset{\text{ש"ה}}{=} E\left(X_1^2 \mathbb{1}_{\{j < |X_1| \le j+1\}}\right)$$

(5)

$$\sum_{k=j+1}^{k} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{C}{j}$$

(6)

$$E\left(\frac{X_1^2}{j} \mathbb{1}_{\{j < |X_1| \le j+1\}}\right) \le 2E\left(\frac{X_1^2}{j+1} \mathbb{1}_{\{j < |X_1| \le j+1\}}\right) \le 2E\left(|X_1| \mathbb{1}_{\{\ \}}\right)$$

(7)

לכן, $\sum V\left(\frac{Y_k}{k}\right) < \infty$, ולכן

$(Y_1 - \mu_1) + \frac{(Y_2 - \mu_2)}{2} + \cdots + \frac{(Y_k - \mu_k)}{k}$ מתכנס כ.ת.

ולפי הלמה של קרונקר $\frac{(Y_1 - \mu_1) + \cdots + (Y_k - \mu_k)}{k}$ מתכנס כ.ת. ל-0.

כזכור $|\bar{X}_n - \bar{Y}_n| \xrightarrow{\text{כ.ת.}} 0$, $\frac{\mu_1 + \cdots + \mu_k}{k} \rightarrow \mu$

ולכן $\bar{X}_n - \mu = \frac{(X_1 - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)}{n} \xrightarrow{\text{כ.ת.}} 0$

14.1.09

תרגול:

התכנסות כ.ת. גוררת התכנסות בהסתברות. $X_n \xrightarrow{P} X \Leftarrow X_n \xrightarrow{a.s} X$

$\varepsilon>0$ וללא הגבלת הכלליות $X=0$ (כי אחרת נסתכל על X_n-X)

$A_n=\{\omega / |X_k(\omega)|<\varepsilon \quad \forall k\ge n\}$ $\quad A_1\subset A_2\subset\cdots$

$P(\bigcup A_n)=1$

הסדרה $P(A_1),P(A_2),\ldots$ לא יורדת ומתכנסת ל-1.

יש N כך שלכל $n\ge N$, מתקיים: $P(A_n^c)<\varepsilon$ $\quad P(A_n)\ge 1-\varepsilon$

$P(|X_n|\ge\varepsilon)<\varepsilon$ $\varepsilon>0$ הוא שרירותי ולכן קיבלנו $X_n\xrightarrow{P}X$

באופן אחר (יותר פשוט) $P(A_n^c)\longrightarrow 0$

כאמור $X_n\xrightarrow{a.s}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$ ולכן $E|X_n-X|^\alpha\longrightarrow 0$ $(\alpha>1)$

משפט שלושת הטורים

נניח שיש סדרה $X_1,X_2,\ldots$ של מ"מ בת"ל לכל $c>0$, נסמן

$X_n^{(c)}=X_n\cdot 1_{\{|X_n|\le c\}}$. נסמן $S_n^{(c)}=X_1^{(c)}+\cdots+X_n^{(c)}$

משפט: $X_1,X_2,\ldots$ מ"מ בת"ל נקבע $c>0$

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>c)$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}E(X_n^{(c)})$ (ג) $\sum_{n=1}^{\infty}V(X_n^{(c)})$

אזי: (i) S_n מתכנס כ.ת. גורר שלכל $c>0$ א', ב', ג' מתכנסים.

(ii) אם א', ב', ג' מתכנסים עבור $c>0$ כלשהו אזי S_n מתכנס כ.ת.

הוכחה: (ii) קיים $c>0$ כך שא', ב', ג' מתכנסים. ב' וג' מבטיחים ש-$S_n^{(c)}$ מתכנס כ.ת.

$A_n=\{\omega/X_n(\omega)\ne X_n^c(\omega)\}$. התכנסות א' משמעותה התכנסות $\sum P(A_n)$, ולכן

לפי הלמה של בורל קנטלי I, בהסתברות 1 ω שייך רק למספר סופי של ה-A_n-ים.

כלומר בהסתברות 1 קיים $N(\omega)$ כך ש-$S_n(\omega)-S_n^{(c)}(\omega)$ הוא קבוע לכל $n>N(\omega)$

לכן $S_n^{(c)}$ מתכנס כ.ת. גורר S_n מתכנס כ.ת.

תוחלת מותנה

יהי X מ"מ. $\mathcal{G}\subseteq\sigma(X)\subseteq\mathcal{F}$. מחפשים מ"מ Y שמקיים את שתי התכונות הבאות:

(1) Y יהיה מדיד לפי $\mathcal{G}$ (2) לכל $A\in\mathcal{G}$ $\quad E(Y\cdot 1_A)=E(X\cdot 1_A)$

אם יש Y כזה, נקרא לו התוחלת המותנה של X לפי (בהינתן) $\mathcal{G}$.

ונסמנו $E(X|\mathcal{G})$. (יש הרבה Y-ים כאלה)

* $E(X)=E(X/\{\phi,\Omega\})$

18.1.09

תוחלת מותנה

$(\Omega, P, \mathcal{F})$, X מ"מ, $\sigma(X)\subseteq\mathcal{F}$, $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ (σ-שדה)

$\mathcal{G}$ יכול להיות נוצר ע"י Y.

נגדיר $E(X|\mathcal{G})$ שיוויון כ"ב בתוך $E(X|Y)$ במקרה שבו $\sigma(Y)=\mathcal{G}$.

$E(X|\mathcal{G})$ הוא מ"מ שמקיים שתי תכונות:

1) מדיד לפי $\mathcal{G}$ 2) לכל $A\in\mathcal{G}$ $E(X\mathbb{1}_A)=E(E(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A)$

שאלה: מה מבטיח שקיים כזה מ"מ? במקרים מיוחדים (כאשר יש שונות משותפת ל-X ול-Y ו- $\sigma(Y)=\mathcal{G}$) נבנה את $E(X|\mathcal{G})$ באופן מפורש.

הוכחה בקווים כלליים:

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $y=(y_1,\dots,y_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^n$$

נסמן: H כל המ"מ על $(\Omega,P,\mathcal{F})$ עם מומנט שני $\langle X,Y\rangle=E(XY)$, $X,Y\in H$

L: כל המ"מ המדידים עם מומנט שני

$\mathcal{G}$: σ שדה שנוצר ע"י הפונקציה

$$Y(t)=\begin{cases}0 & t<\frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{3}\le t\le\frac{3}{4}\\ 4 & t>\frac{3}{4}\end{cases}$$

נסמן $X=E(X|\mathcal{G})+Z$. ניקח $A\in\mathcal{G}$

$$E(X\mathbb{1}_A)=E((E(X|\mathcal{G})+Z)\mathbb{1}_A)=E(E(\mathcal{G}|X)\mathbb{1}_A)+\underbrace{E(Z\mathbb{1}_A)}_{0}=E(E(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A)$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "Y"] \arrow[rr, bend right, "E(X|Y)"'] & \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "h"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Y מ"מ, $\sigma(Y)=\mathcal{G}$

h היא פונק' מדידה: $h(y)=E(X|Y=y)$

$E(X|Y)$ מדיד לפי $\sigma(Y)$. לשם הפשטות $W=E(X|Y)$.

$W^{-1}(\{t\})$ קבוצה זו נמצאת ב $\sigma(Y)$, לכן יש קבוצה, נקרא לה $B\in\mathbb{R}$ כך ש $W^{-1}(t)=Y^{-1}(B)$

$$\begin{tikzcd}
W^{-1}(t) \subseteq \Omega \arrow[r, "Y"] \arrow[rr, bend left, "W"] & \mathbb{R} & \mathbb{R} \\
 & B \arrow[ul, "Y^{-1}(B)"] \arrow[r, "h"] & \{t\}
\end{tikzcd}$$

דוגמה:

$\Omega=[0,1]$, Y יוצרת את ה σ-שדה שנוצר ע"י החלוקה $[0,\frac{1}{3}),[\frac{1}{3},\frac{3}{4}],(\frac{3}{4},1]$

X= זהות. $E(X|Y)=?$

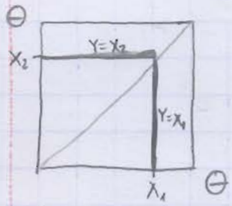
ממוצע

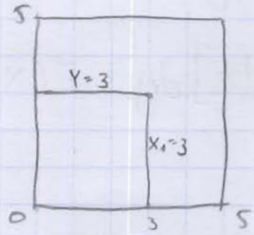
$$E(X|Y)(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{6} & \omega\in[0,\frac{1}{3})\\ \frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{13}{24} & \omega\in[\frac{1}{3},\frac{3}{4}]\\ \frac{7}{8} & \omega\in(\frac{3}{4},1]\end{cases}$$

$h(0)=\frac{1}{6}$, $h(1)=\frac{13}{24}$

$h(4)=\frac{7}{8}$

דוגמה: X_1, X_2, כמו הנ"ל, $X_i \sim U(0,\theta)$, $Y=\max(X_1,X_2)$



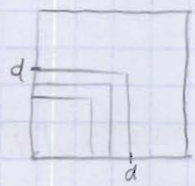


נניח $\theta=5$, $Y=3$

$$\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}\cdot 3$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{3} = \frac{3}{4}t$$

$$E(X|Y) = \frac{3}{4}Y$$

$$E(X|Y=t) = \frac{3}{4}t$$



נראה שהניחוש נכון

מספיק להראות שלכל $0\le d\le\theta$ התוחלות של X ושל $X_1|Y$ זהות.

$$\int_0^d\int_0^d \frac{x_1}{\theta^2}\,dx_1\,dx_2$$

תוחלת של X בריבוע $[0,d]^2$

גופא זה אמור להיות זהה ל- $\int_0^d \frac{3}{4}y\cdot(\text{צפיפות } Y)\,dy$

מהי צפיפות Y? ב- $F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X_1\le y \text{ וגם } X_2\le y) =$

$$P(X_1\le y)\cdot P(X_2\le y) = \frac{y^2}{\theta^2}$$

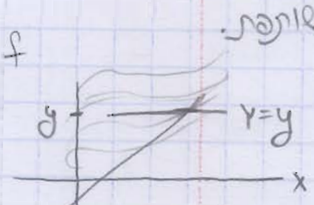
$$f_Y(y) = \begin{cases} & 0\le y\le\theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\int_0^d\int_0^d \frac{x_1}{\theta^2}\,dx_1\,dx_2 = \int_0^d \frac{3}{4}y\cdot\frac{2y}{\theta^2}\,dy = \frac{6}{4\theta^2}\int_0^d y^2\,dy = \frac{6}{4\theta^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^d$$

$$\frac{6d^3}{12\theta^2} = \frac{d^3}{2\theta^2}$$

במקרה של-X ול-Y יש צפיפות משותפת...

ניתן למצוא את $E(X|Y)$ באופן מפורש: $f_{X,Y}(x,y)$ הצפיפות המשותפת.



נגדיר צפיפות מותנה $\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = f_{X|Y}(x|y)$

(תזכורת: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$)

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx = \left\{\begin{array}{c}\text{פונקציה של } y \text{ בלבד} \\ \text{(ולכן מדיד ב-}\sigma(Y)\text{)}\end{array}\right\}$$

$$E(E(X|Y)\mathbb{1}_C) = E(X\mathbb{1}_C)$$

יש להראות שלכל $C\in\sigma(Y)$:

$C\in\sigma(Y)$ ולכן יש B בורל (ב-$\mathbb{R}$) כך ש- $C = Y^{-1}(B)$.

$$E(X\mathbb{1}_C) = \int x f_X(x)\cdot\mathbb{1}_C\,dx$$

אבל אז:

$$h(y) = E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x,y)\,dx = \int h(y) \mathbb{1}_C f_Y(y)\,dy = ב$$

$$\iint x f_{X|Y}(x|y) \mathbb{1}_B f_Y(y)\,dx\,dy = \iint x f_{X,Y}(x,y) \mathbb{1}_B\,dx\,dy = ב$$

$$= \int \mathbb{1}_B \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,dx \right] dy = E(X \mathbb{1}_C)$$

תכונות התוחלת המותנית.

א) $X \perp Y$ ב״ת

לכל $A \in \sigma(Y)$

$$E(X|Y) \stackrel{?}{=} E(X \mathbb{1}_A) = E(E(X|Y) \mathbb{1}_A)$$

$$E(X \mathbb{1}_A) = E(X)P(A)$$

$\Leftarrow$ $E(X|Y) = E(X)$ היינו, קבוע.

ב) $E(X|Y)$ היא לינארית:

$$E(X_1+X_2|Y) = E(X_1|Y) + E(X_2|Y)$$

$$E(\lambda X_1|Y) = \lambda E(X_1|Y)$$

ג) $X_1 \geq X_2$ כ.ת $E(X_1|g) \geq E(X_2|g)$

רעיון להוכחה: $C = \{E(X_2|g) > E(X_1|g)\}$, C מדידה לפי g ומשתמשים בתכונה ב׳

נקבל ש $P(C)=0$.

ד) תכונת המגדל $g_2 \subseteq g_1 \subseteq \mathcal{F}$

$$E(X|g_2) = E(E(X|g_1)|g_2)$$

21.1.09

תוחלת מותנה: במובן הבסיסי $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $(P(B)>0)$

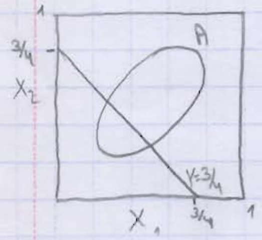
במובן הרגיל $P(A/B)=E(1_A/1_B)(\omega)$ $(\omega\in B=$ קבוע$)$

$\sigma(1_B)=\{\emptyset,\Omega,B,B^c\}$

$$E(1_A/1_B)(\omega)=\begin{cases}\frac{P(A\cap B)}{P(B)} & \omega\in B\\ \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} & \omega\in B^c\end{cases}\qquad (P(B),P(B^c)>0)$$

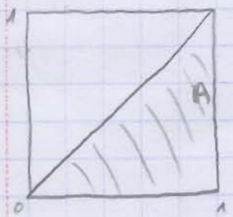
– X מ"מ, A מאורע, $P(A/X=x)=E(1_A/X)(\omega)$ $(X(\omega)=x)$

– X_1,X_2 מ"מ אחידים בת"ל, $Y=X_1+X_2$



$P(A/Y=y)$ $P(A/Y=3/4)$

$\Omega=[0,1]^2$



$P(A/Y=y)$ $A=\{X_1>X_2\}$

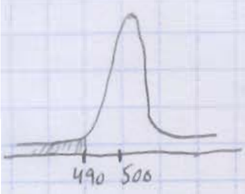
$P(A/Y=y)=1/2$ $E(1_A/Y)(\omega)=\begin{cases}0 & \omega=(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1+\omega_2=\omega\\ 1/2 & \text{אחרת}\end{cases}$

התכנסות בהתפלגות ומשפט הגבול המרכזי

הגדרה: תהי $X_1,X_2,\ldots$ סדרת מ"מ. נאמר ש$\{X_n\}$ שואפת בהתפלגות למ"מ X אם:

$F_{X_n}\to F_X$ נקודתית (כאשר $F_{X_n}(t)\to F_X(t)$ לכל t. סמן $X_n\xrightarrow{D}X$).

במילים אחרות לכל t $P(X_n\le t)\to P(X\le t)$



משפט: (הגבול המרכזי)

$X_1,X_2,\ldots$ מ"מ ב"ת שה"ה עם פונק' יוצרת מומנטים $\bar{X}_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{a.s}\mu$ (תוחלת של X_1)

נניח כי $X_1,X_2,\ldots$ שהם בעלי תוחלת 0 (בהכ"ל: $X_n-\mu$),

$Y_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$. $Y_n\xrightarrow{D}$ נורמלי עם השונות של X_1

המשפט: $X_1,X_2,\ldots$ מ"מ ב"ת שה"ה עם תוחלת 0 ופונק' יוצרת מומנטים, אזי:

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,\sigma^2)\qquad \sigma^2=V(X_1)$$

$$M_{Y_n}(t)=E\left(e^{tY_n}\right)=E\left(e^{t\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}}\right)=E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}X_1}\cdot e^{\frac{t}{\sqrt{n}}X_2}\cdots e^{\frac{t}{\sqrt{n}}X_n}\right)=$$

$$=\left[M_{X_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n=\left[1+0+\frac{\sigma^2t^2}{2n}+\frac{E(X^3)t^3}{\sqrt{n}^3}+\cdots\right]^n\longrightarrow e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

פונק' יוצרת המומנט של $N(0,\sigma^2)$

$\boxed{\left(1+\frac{c}{n}+\ldots\right)^n\to e^c}$